Familles de situations d'interactions en algèbre élémentaire : deux exemples

Brigitte Grugeon [1, 2], *Lalina Coulange* [1,3]

Valérie Larue[4]

[1] DIDIREM - Paris VII, 2, Place Jussieu, 75 251 PARIS Cedex 05
[2] IUFM d'Amiens 49, Boulevard de Châteaudun 80044 AMIENS Cedex
[3] IUFM de Créteil, Rue Jean Macé, 94861 BONNEUIL Cedex
[4] Equipe SASO, Université Jules Verne, 33 rue St Leu, 80039 Amiens CEDEX 01

Résumé

Nous présentons ici une recherche en cours, dans le cadre du projet LINGOT, projet interdisciplinaire dont l'objectif général est d'élaborer des environnements interactifs visant à aider les enseignants à réguler leur enseignement en algèbre élémentaire. Nous montrons en quoi l'articulation entre des points de vue informatique et didactique nous permet de penser l'implémentation de familles de situations d'interaction, relatives à des enjeux d'apprentissage en algèbre, définis *a priori*. Nous illustrons cette démarche sur deux exemples : l'un « Portrait-robot » pour l'interprétation d'expressions algébriques, l'autre « Bouchons les trous » pour la mise en équation. Pour conclure, nous présentons comment sélectionner des situations adaptées à un profil d'élève. Cette étude de cas nous permet d'entrevoir l'articulation entre les volets diagnostic et apprentissage du projet LINGOT.

I. Contexte et problématique de la recherche

La recherche que nous présentons ici fait partie du projet LINGOT [Delozanne et al 2002a]. L'objectif de ce projet est de concevoir et de mettre à disposition des enseignants des environnements informatiques qui les aident dans des tâches complexes d'enseignement, telles que la gestion de l'hétérogénéité, la différenciation de l'enseignement, l'aide individualisée. Ces nouvelles tâches nécessitent une analyse fine des productions des élèves et des modes de fonctionnement pour définir des stratégies d'apprentissage adaptées. Nous fondons la conception de ces environnements sur des résultats de recherches menées dans divers domaines, didactique des mathématiques, informatique, EIAH : la spécificité du projet LINGOT étant justement d'articuler finement ces différents points de vue.

Rappelons le contexte global dans lequel s'inscrit le présent travail. Cet historique nous permettra d'amorcer la question de l'articulation entre les différents champs, au cœur du projet dès sa fondation, et de situer les nouveaux objets de recherche.

Les travaux fondateurs

Le projet s'appuie d'une part sur des résultats de travaux de recherche en didactique des mathématiques menés par B. Grugeon [Grugeon 1995, 1997]. Elle définit un modèle multidimensionnel de la compétence algébrique, qui la conduit à élaborer un diagnostic (version papier crayon) permettant d'identifier des cohérences de fonctionnement chez les élèves en algèbre. Elle en propose une description, appelée profil de l'élève en algèbre.

D'autre part, un projet s'inscrivant dans une problématique EIAH réunissant des informaticiens et des didacticiens, a permis d'automatiser en partie ce diagnostic et de concevoir un prototype PEPITE qui aide les enseignants à établir un profil des compétences en algèbre de leurs élèves [Jean 2000].

À la suite de ces travaux…

Les enseignants ayant expérimenté PEPITE (en formation continue ou dans leurs classes) ont exprimé la difficulté à exploiter les profils construits par le logiciel, notamment dans la perspective de proposer des situations d'apprentissages adaptés à leurs élèves [Delozanne et al 2002a]. Comment les aider dans ce sens ? Quelles situations d'apprentissage proposer ? À cet effet, nous définissons un environnement logiciel PEDAGOG destiné au professeur, qui a pour objectif, de lui proposer , un ensemble de situations d'apprentissage adaptées au profil de l'élève. Un profil d'élève étant connu (Cf. la communication sur le projet pépite dans ce volume), notre travail vise à fournir une liste de compétences algébriques à travailler, et pour chacune d'entre elles, un ensemble de situations adaptées parmi lesquels l'enseignant peut choisir et organiser l'apprentissage de l'élève. Ces situations peuvent être proposées, soit dans l'environnement habituel papier-crayon, soit impliquer d'autres logiciels, soit mettre en jeu un nouvel environnement informatique ENVIDAP. Nous présentons ci-dessous un schéma de l'articulation entre les volets diagnostic et apprentissage de LINGOT :

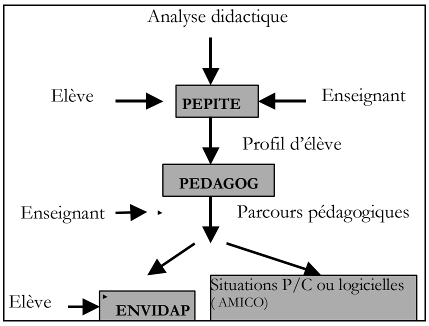


Figure 1 : schéma de l'articulation entre les volets diagnostic et apprentissage de LINGOT

Comment déterminer les situations d'apprentissage et les paramétrer pour les générer automatiquement, en vue de définir des parcours pédagogiques différenciés, adaptés aux profils d'élèves en algèbre ? Au delà, nous serons amenées à aborder par la suite une question plus globale : comment l'articulation entre des résultats de recherche en didactique des mathématiques et en informatique permet-elle d'avancer dans cette recherche ?

II. De la définition de situation d'interaction à celle de famille de situations d'interaction

Des travaux antérieurs de l'équipe [Delozanne 1994, Dubourg et al, Dubourg 1995, Bruillard et al 2000] nous avaient amenés à définir un instrument de spécifications d'un logiciel d'apprentissage dans le cadre d'une équipe pluridisciplinaire : les situations d'interaction.

II.1 Définition d'une situation d'interaction

La conception des situations d'interaction prend en compte trois éléments : un problème d'enseignement explicité par une analyse cognitive, épistémologique et didactique, la spécification d'un contexte d'usage, les activités et le paramétrage de ces activités qui permettent de définir des situations d'interaction. Le problème d'enseignement étudié par X. Dubourg [Dubourg 1995] concerne la difficulté des élèves de fin de collège à raisonner sur les droites du plan.[1] Il définit une situation d'interaction liée à une activité donnée à partir des descripteurs suivants : un objectif d'apprentissage, une tâche, des actions du système (mise à disposition des outils de résolution et de contrôle) et les stratégies associées, d'une part, des actions de l'élève (usage des outils de résolution et de contrôle disponibles) et les stratégies associées, d'autre part. La figure ci-dessous rend compte de cette définition.

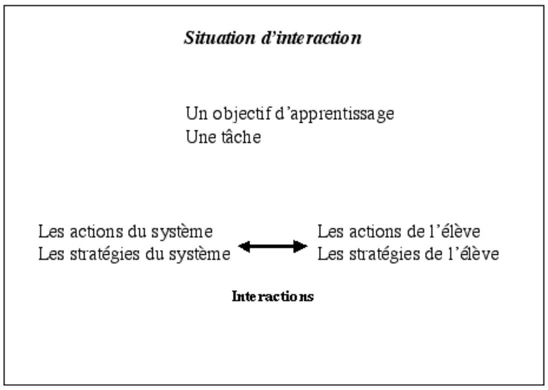


Figure 2 : Situation d'interaction d'après Dubourg (1995)

X. Dubourg a enrichi le modèle statique des situations d'interaction, proposé par E. Delozanne, en permettant une gestion de l'interaction prenant en compte les actions de l'élève sur la durée. Les stratégies du système correspondent au type de suivi et sont coordonnées par un module pédagogique qui assure la cohérence des actions du système en liaison avec des objectifs pédagogiques de la séance et des objectifs de la situation liés aux précédents mais dans le contexte de la tâche et de l'élève.

II.2 Vers la définition d'une famille de situations d'interaction

Dans la perspective PEDAGOG – ENVIDAP, il nous paraît nécessaire de faire évoluer cette définition vers celle de *famille* de situations d'interaction, pour les paramétrer et les générer automatiquement, en vue de définir des parcours pédagogiques différenciés, adaptés aux profils d'élèves en algèbre.

À cet effet, nous identifions sur quels objets de la situation d'interaction portent les paramètres pertinents à faire varier *pour un objectif d'apprentissage relatif à des contenus mathématiques identifiés*. Dubourg envisageait des paramètres liés aux tâches et aux interactions (système-élève) et parlait déjà de familles de situations d'interaction, mais sans avoir les moyens théoriques d'en orienter la définition et l'usage vers un objectif d'apprentissage défini *a priori*. C'est cette piste que nous nous proposons d'explorer en prenant appui sur des travaux en didactique des mathématiques.

Les paramètres en jeu concernent tant la tâche, que les actions et stratégies du système, d'où découleront en partie les actions et stratégies de l'élève. La figure 3 synthétise l'évolution ainsi envisagée de la notion de situation d'interaction selon Dubourg :

[1] Se fondant sur l'analyse cognitive de Duval [Duval 88], il propose trois types d'activités aux élèves leur permettant de mettre en œuvre les règles de correspondance sémiotiques entre les registres des représentations graphiques et celui des écritures algébriques, en particulier des activités graphiques et algébriques permettant de travailler le passage d'une représentation à l'autre

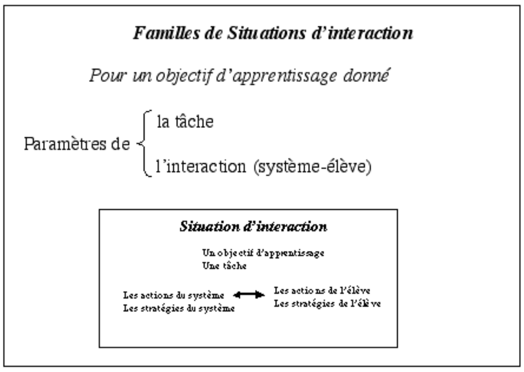


Figure 3 : Famille de situations d'interaction

Montrons maintenant l'articulation envisagée de ce concept de familles de situations d'interaction, avec des concepts de didactique des mathématiques.

II.3 De familles de situations d'interaction à situations d'apprentissage

Objectifs d'apprentissage et objets de savoir algébrique

Tout d'abord, il nous faut identifier les objectifs d'apprentissage. Rappelons que dans le contexte présent, notre ambition est de recouvrir tous ceux relatifs au domaine de l'algèbre élémentaire. C'est ici qu'intervient le point de vue théorique des champs conceptuels de Vergnaud ([Vergnaud 1990]) et la dialectique outil-objet de Douady ([Douady 1986]). Ce point de vue nous amène à penser un découpage multidimensionnel du savoir algébrique ([Grugeon 1995]), dont la figure 4 donne un aperçu très schématique :

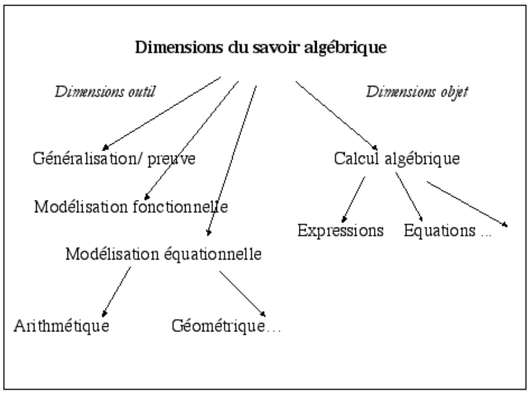


Figure 4 : Découpage multidimensionnel du savoir algébrique

Objets de savoir algébrique et situations d'apprentissage

Relativement à chaque enjeu d'apprentissage ainsi appréhendé, il s'agit dès lors de délimiter et de caractériser des situations d'interaction adéquates. Ceci nous conduit à envisager les concepts de la théorie des situations didactiques, dans leurs développements les plus récents ([Brousseau 1986], [Perrin Glorian 1999], [Coulange 2001]). Ces outils nous permettent d'associer la définition de tâches, d'interactions, et de paramètres aux objets de savoir algébrique en jeu. Tâche et interactions sont englobées dans le concept même de situation didactique et la notion de variable didactique modélise les paramètres pertinents sur lesquels jouer, relativement à ces objets de savoir. Nous serons également en mesure de déterminer les situations d'apprentissages adaptées à des fonctionnements cognitifs d'élèves en algèbre.

L'articulation entre ces points de vue EIAH (à travers la notion de famille de situations d'interaction) et didactique (à travers celles de situations et variables didactiques) nous permet donc de penser l'implémentation informatique du volet apprentissage du projet LINGOT. Nous allons maintenant illustrer ces avancées sur deux exemples.

III. Deux exemples : *« Bouchons les trous » et « Portrait Robot »*

Si l'on reprend la figure 4, les exemples choisis concernent les objets de savoir désignés par : « Modélisation équationnelle – Arithmétique » et « Calcul algébrique – Expressions ». Nous avons mis à profit des travaux menés par des membres didacticiens de l'équipe, qui fournissent des entrées intéressantes relativement à ces objets.

III.1 L'exemple de « Portrait Robot »

Relativement à l'étude des expressions algébriques, nous nous sommes inspirées du travail de Bardini [Bardini 2003] sur la genèse épistémologique des expressions algébriques, pour élaborer des familles de situations d'interaction, dites « Portrait Robot ». Le principe général de « Portrait Robot » est le suivant : l'élève doit d'abord identifier une expression algébrique au sein d'une liste donnée en posant le minimum de questions possibles (questions du type : l'expression ou la sous-expression sélectionnée est-t-elle un carré ?). Après chaque question, le système interprète la réponse de l'élève, y répond par OUI ou NON. L'élève élimine alors les expressions inadéquates. Le système affiche une aide visuelle conservant la trace des questions auxquelles le système répond OUI (dans l'exemple ci-dessous, sous forme d'un arbre actualisé à chaque réponse positive). En dernier lieu, l'élève traduit l'expression identifiée en français.

Nous présentons ci-dessous des maquettes des interactions ainsi envisagées.

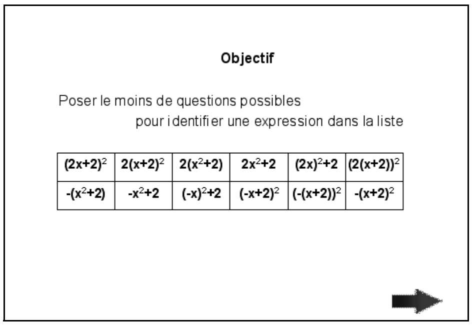


Fig. 6.a : Consigne de « Portrait Robot »

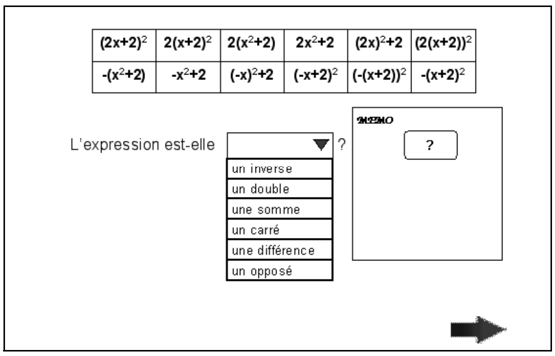


Fig. 6.b : L'élève pose une question sur l'expression initiale

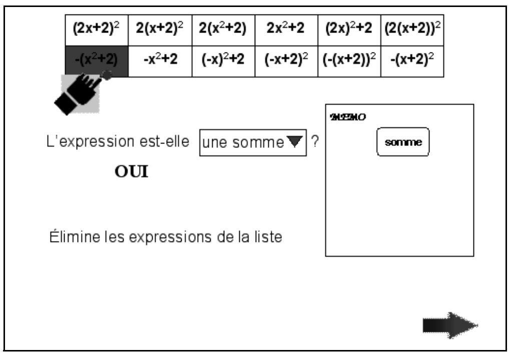


Fig. 6.c : Rétroaction du système : réponse et élimination des expressions

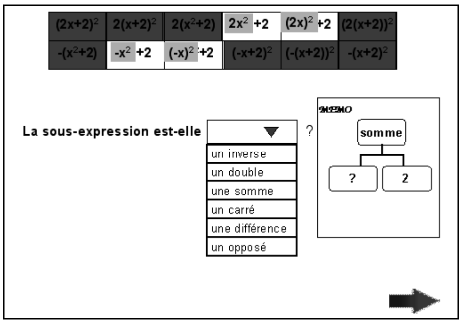


Fig. 6.d : L'élève pose une question sur une sous-expression

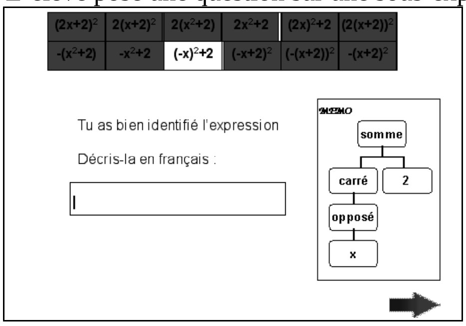


Fig. 6.d : Le système félicite l'élève et lui demande décrire en français l'expression algébrique.
Une aide visuelle est fournie sous la forme d'un arbre résumant les caractérisations trouvées par l'élève

« Portrait Robot » recouvre en fait une multitude de situations d'interactions possibles, dont ne peut rendre compte l'illustration présentée ci-dessus. L'analyse didactique a permis d'identifier des variables didactiques liées à la complexité de l'expression algébrique en jeu (niveau d'imbrication de sous-expressions, type d'opérateurs, etc.) et à la liste d'expressions (nombre d'expressions, complexité des expressions une à une ou corrélées, etc.). De plus, interviennent des variables relatives à des outils mis à disposition par le système : forme de l'aide visuelle donnée (*mémo :* arbre, mémoire des questions, etc.), présence ou non d'un outil pour décrire l'expression en français (palette de mots, mots dans le désordre, etc.) et au type de suivi (notamment les rétroactions fournies par le système, après élimination au sein de la liste).

III.2. L'exemple de « Bouchons les trous »

Relativement à la mise en équation de problèmes écrits, nous nous sommes appuyées sur un environnement informatique déjà existant, nommé « Bouchons les trous », conçu à partir d'une idée originale de René de Cotret ([Lemoyne et al. 2002]). L'interface figurant ci-dessous (figure 7) illustre en quoi consiste la tâche « Bouchons … ». Pour l'élève. Il s'agit soit de compléter le libellé d'un problème lacunaire à partir d'une ou plusieurs équations associées fournies, soit de compléter une équation lacunaire à partir d'un libellé de problème.

Fig. 7 : Exemple d'un énoncé à compléter dans « Bouchons les trous »

Avec l'accord des concepteurs de Bouchons les trous, nous nous proposons de définir une famille de situations d'interaction pour générer automatiquement des exercices de type « Bouchons les trous » (qui sont dans le logiciel québécois, fabriqués par les enseignants) à partir d'une interface auteur.

Nous présentons ci-dessous des maquettes correspondant à une situation d'interaction « Bouchons les trous », ainsi envisagée dans PEDAGOG/ENVIDAP.

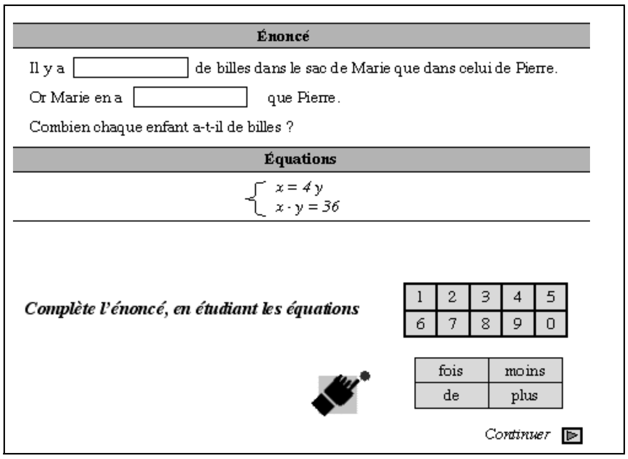


Fig. 8.a Consigne initiale « Bouchons les trous »
Le système met à disposition une palette de mots et de chiffres pour compléter l'énoncé

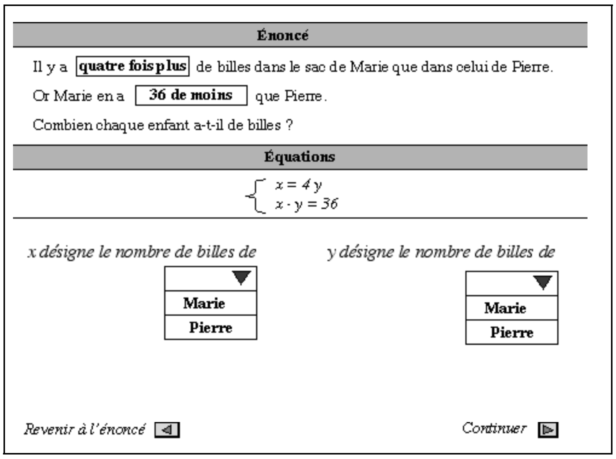


Fig. 8.b Identification des inconnues
Suite à une erreur de l'élève, le système lui demande d'identifier les inconnues désignées

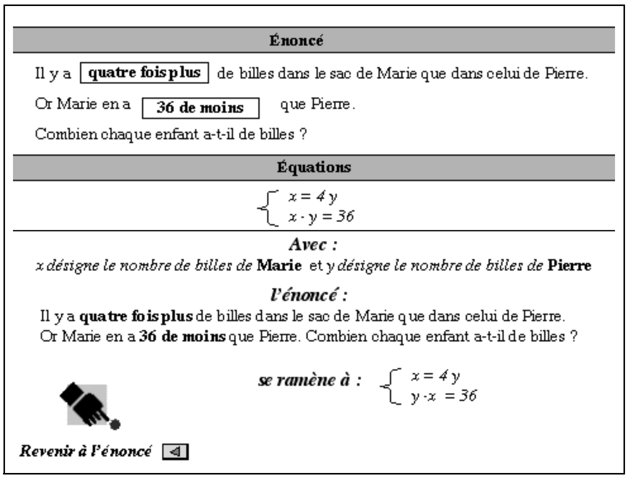


Fig. 8.c Mise en contradiction de la réponse d'élève
Le système renvoie les équations obtenues à partir de l'énoncé, tel qu'il a été complété par l'élève

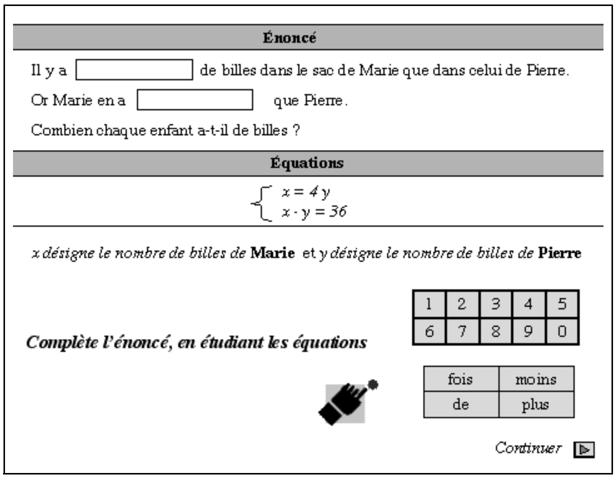


Fig. 8.d Retour à l'énoncé « Bouchons les trous »
Le système met à disposition une palette de mots et de chiffres pour compléter l'énoncé et les inconnues identifiées par l'élève

Comme pour « Portrait-Robot », on peut générer une multitude de situations d'interactions sur la base de « Bouchons les trous ».

Nous avons identifié un nombre important de variables didactiques (corrélées ou non), relatives aux tâches « Bouchons les trous » ([Coulange et René de Cotret 2002]):
- Nature du problème donné : relations numériques en jeu dans le problème (dans l'exemple ci-dessus, il s'agit d'un rapport et d'une différence données entre les inconnues), forme écrite plus ou moins congruente avec les équations.

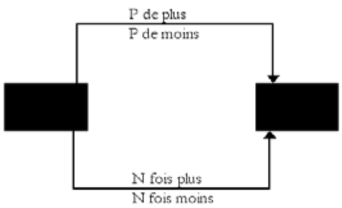
- Les équations données : nombre d'équations et d'inconnues, équations de forme plus ou moins congruente avec l'énoncé (celles-ci peuvent éventuellement être transformées[2]).
- Le (ou les) trou(s) : nombre de trous, au sein du problème ou de l'équation, contenu du trou (opérateurs, données numériques, etc.)…

De plus, interviennent également des variables liées aux outils mis à disposition par le système (palettes de mots ou de chiffres, présence ou non d'une feuille de brouillon de calculs, etc.) et au type de suivi envisagé (qui peut être plus ou moins laissé ouvert).

L'analyse didactique permet de définir des tâches, des actions et des stratégies du système (outils mis à disposition et rétroactions envisagées) visant des interactions pertinentes au vu d'apprentissages repérés autour de la mise en équation. Tant relativement à des situations ponctuelles d'interaction, qu'à des familles de situations d'interaction. C'est maintenant ce que nous nous proposons d'illustrer.

Repartons de l'exemple développé ci-dessus. Est-il possible de générer une famille de situations d'interaction, en partant de la situation présentée ? Présentons les différentes questions que pose une telle tentative.

Tout d'abord, l'analyse didactique nous invite à étudier la structure des relations numériques entre les données du problème posé : ici rapport et différence entre les grandeurs inconnues. Nous définissons un prototype d'énoncé qui pourrait prendre la forme schématique suivante :



De même, il s'agit de fixer les valeurs d'autres variables, telles que « deux trous dans le problème », la nature de ces trous (ici : type n fois plus, n' fois moins, p de plus, p' de moins) ainsi que le nombre d'équations données (ici : toujours au nombre de deux).

C'est à ce prix, qu'une génération automatique de tâches « Bouchons les trous »[3] et qu'une caractérisation plus globale des actions et des stratégies du système deviennent possibles.

Suivons le fil de notre exemple. On peut considérer que notre ensemble de tâches est maintenant déterminé. La trame de stratégies du système, apparente dans l'exemple développé (Figures 8) : identification des inconnues puis mise en contradiction si erreur du côté élève puis retour à la tâche initiale, est facilement généralisable à cet ensemble de tâches. Du côté des outils du système, ceux mis à disposition dans les maquettes présentées, peuvent également être mis à profit sur l'ensemble des tâches générées. Par ailleurs, il est possible de penser d'autres stratégies ainsi que d'autres outils, généralisables sur cet ensemble.

D'où la possibilité de penser la génération automatique des familles de situations « Bouchons les trous » de ce type. L'analyse didactique permet d'une part, de sélectionner parmi toutes

[2] Il est possible d'associer à un énoncé, des équations transformées. Par exemple, au lieu d'associer $x + 8x = 45$ au problème : « René a 8 fois plus de billes que Line. Line et René ont 45 billes au total. Quel est le nombre de billes de chaque enfant ? », on peut lui associer l'équation $9x = 45$ (tout le jeu consistant dès lors à faire disparaître « huit fois plus de » dans l'énoncé à trou).

[3] Cette génération automatique suppose l'étude de conditions mathématiques, somme toute assez simple dans $\mathbb{N}$, ainsi que la définition et la gestion de base de données, afin de faire varier la forme écrite des énoncés.

ces possibilités, d'une part celles qui sont pertinentes par rapport à un apprentissage défini *a priori* sur la mise en équation. D'autre part, elle permet de penser les situations appropriées relativement à un profil d'élève donné. Nous explorons actuellement ce dernier point qui au final permettra l'articulation entre PEPITE et PEDAGOG/ENVIDAP dans le projet LINGOT.

III.3. Profil et situations d'interactions adaptées : survol d'un exemple

Afin que le lecteur puisse entrevoir cette perspective, nous survolons le cas d'une élève, désignée par *Blandine* dans la suite du texte.

Le test Diagnostic de PEPITE, nous a permis d'identifier des caractéristiques significatives dans le profil de *Blandine* (i.e. celles que l'on retient pour définir des classes de profil[4]). Les réponses de *Blandine* révèlent des fragilités dans la dimension objet et une faible maîtrise globale de la dimension outil. De par sa position que l'on pourrait qualifier de « fausse débutante » en mise en équation de problème, nous faisons l'hypothèse qu'une situation d'interaction type « Bouchons les trous » peut s'avérer pertinente.

Par ailleurs, si l'on se penche plus avant sur le profil de *Blandine*, on repère des points de force tels que :
- sa plus grande capacité à traduire algébriquement une expression en français que dans le sens inverse.
- le fait qu'elle donne du sens aux expressions algébriques.

Mais aussi des fragilités, telles que des difficultés apparentes à interpréter les opérateurs (par exemple : $a^2 = a + a$).

Ceci nous conduit à attribuer des valeurs à certaines variables des situations « Bouchons… », que l'on pourrait proposer à *Blandine.*
Notamment, on situera les trous, côté équation et non côté problème : ceci permettant d'exploiter une des forces repérées sur le sens de traduction (langage naturel vers algèbre). Nous serions enclins à proposer au moins dans un premier temps, des problèmes de structure simple (type « somme et rapport »[5]), et de forme relativement congruente aux équations données. Par exemple :

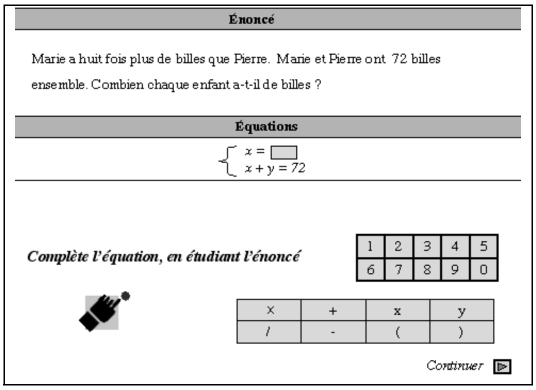


Figure 9a : Exemple d'une première consigne « Bouchons les trous »
Profil type *Blandine*

[4] Les classes de profils sont déterminées par regroupement des profils selon trois composantes :
- La mobilisation et la maîtrise de l'outil algébrique,
- La maîtrise de la traduction algébrique en liaison avec les autres registres de représentation,
- La maîtrise du calcul algébrique (Travail en cours Grugeon B. et Gélis J-M)

[5] Dans l'énoncé, sont donnés : le rapport entre deux grandeurs inconnues, ainsi que leur somme (tout comme plus haut, étaient donnés, le rapport et la différence).

Ce problème ne devant pas poser de difficultés majeures à un profil type *Blandine*, le système analysera la réponse de l'élève, sans fournir de rétroaction préalable.

Si l'élève a répondu correctement à ce premier problème « Bouchons les trous », nous envisageons une deuxième situation d'interaction, qui pourrait être basée sur la consigne suivante :

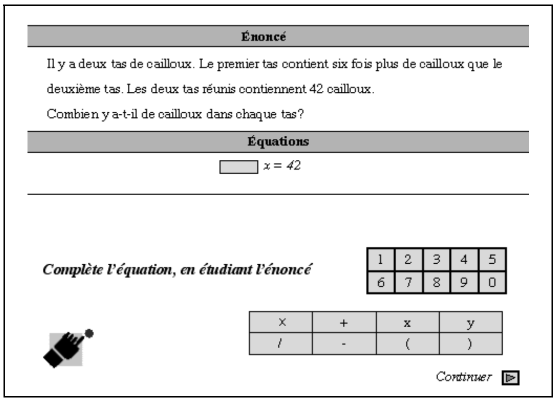


Figure 9b : Exemple d'une deuxième consigne « Bouchons les trous »
Profil type *Blandine*

En effet, ce problème est de structure identique au précédent. Mais en le ramenant à une équation à une inconnue et en situant le trou dans l'équation comme ci-dessus, cela donne l'occasion de faire travailler la dimension objet (soit en regroupant les x : réponse : 7, soit en conservant l'écriture initiale de l'équation : « 6x + » ou « x + 6… »). Ce qui dans le cas de *Blandine*, peut représenter un levier pour la suite. Des rétroactions, telles que l'identification de l'inconnue (guidée par le système), ou autres, seront sans doute nécessaires, dans le cas présent.

Nous n'irons pas plus loin dans la description d'un parcours possible pour *Blandine* (avec des situations d'interaction type « Bouchons les trous », s'appuyant par exemple sur des énoncés non congruents puis des situations plus classiques de mise en équation, etc.). Celui-ci prendra en compte à la fois le profil initial de l'élève et les réponses données au fil des situations qui lui sont proposées.

Ce survol rapide de l'exemple *Blandine*, illustre les potentialités d'une telle approche, tout en laissant ouvertes des questions autour des modélisations didactique et informatique qui permettraient de la systématiser.

En guise de conclusion

Nous avons voulu rendre compte ici des perspectives qui s'ouvrent à nous à travers la recherche au sein du volet apprentissage du projet LINGOT. Le travail présenté est exploratoire, par de nombreux aspects. Il s'agit de poursuivre la recherche de points d'ancrage à la croisée des points de vue informatique et didactique, pour penser la construction systématique de parcours personnalisés d'apprentissage en algèbre élémentaire.

[Bardini 2003] C. Bardini (2003), The construction of meaning of algebraic symbolism at different school levels. An epistemological and didactical approach, CERME 3: Third Conference of the European Society for Research in Mathematics Education (28 février au 3 mars 2003, à Bellaria, Italie).

[Brousseau 1986] G. Brousseau (1986), Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 7.2, La Pensée Sauvage, Grenoble, 33-116.

[Bruillard et al. 2000] E. Bruillard, E. Delozanne, P. Leroux, P. Delannoy, X. Dubourg, P. Jacoboni, J. Lehuen, D. Luzzati, P. Teutsch (2000). Quinze ans de recherche sur les sciences et techniques éducatives au LIUM. Education et informatique. Hommage à Martial Vivet. Sciences et Techniques éducatives, vol. 7, n° 1, Hermès Science, p. 87-145.

[Coulange 2001] L. Coulange (2001), Enseigner les systèmes d'équations en Troisième, Une étude économique et écologique, *Recherches en Didactique des Mathématiques,* Vol. 21.3, La Pensée Sauvage, Grenoble, 305-353.

[Coulange et René de Cotret 2002] L. Coulange, S. René de Cotret (2002), Un environnement informatique d'apprentissage pour l'élève, d'enseignement pour le professeur, de recherche pour le chercheur... autour de la mise en équation, Intervention au séminaire DIDATECH au laboratoire LEIBNIZ à Grenoble.

[Delozanne 1994] E. Delozanne (1994), Un projet pluridisciplinaire : ELISE, un logiciel pour donner des leçons de méthodes, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol 14.1.2, La Pensée Sauvage, Grenoble, 211-250

[Delozanne et al. 2002a], E. Delozanne, B. Grugeon , M. Artigue, J. Rogalski, Modélisation et mise en œuvre d'environnements informatiques pour la régulation de l'apprentissage, le cas de l'algèbre avec le projet LINGOT, *Réponse à l'appel à Projet Cognitique 2002,* École et sciences cognitives: Les apprentissages et leurs dysfonctionnements.

[Delozanne et al 2002 b], É. Delozanne, B. Grugeon, P. Jacoboni, Analyses de l'activité et IHM pour l'éducation, In *Proceedings of IHM'2002*, International Conference Proceedings Series, ACM, 2002, Poitiers, France 25-32

[Douady 1986], R. Douady (1986), Jeux de cadres et dialectique outil-objet, *Recherches en didactique des mathématiques*, Vol. 7.2, La Pensée Sauvage, Grenoble, 5-31.

[Dubourg et al. 1995] X. Dubourg, E. Delozanne et B. Grugeon (1995), *Situations d'interaction en EIAO : le système repères*, in D. Guin, J.-F. Nicaud et D. Py, EIAO, Tome 2, 233-244, Eyrolles, Paris, 1995

[Dubourg 1995] X. Dubourg (1995), *Modélisation de l'interaction en EIAO, une approche événementielle pour la réalisation du système repères*, Thèse de l'Université de Caen, 242 p., Caen, Octobre 1995.

[Duval 1988] R. Duval, *Graphiques et équations.* Annales de didactique et sciences cognitives, vol.1, IREM de Strasbourg, 235-253.

[Grugeon, 1995] B.Grugeon, E*tude des rapports institutionnels et des rapports personnels des élèves à l'algèbre élémentaire dans la transition entre deux cycles d'enseignement : BEP et Première G,* Thèse de doctorat, Université Paris 7, 1995.

[Jean et al. 1999] S.Jean, E. Delozanne, P. Jacoboni, B.Grugeon, A diagnostic based on a qualitative model of competence in elemantary algebra, in S. Lajoie, M. Vivet, *AI&ED'99*, IOS Press, Amsterdam, , Le Mans (1999) 491-498

[Jean 2000] S. Jean, *PEPITE : un système d'assistance au diagnostic de compétences*, Thèse de doctorat, Université du Maine, 2000.

[Lemoyne et al. 2002] G. Lemoyne, S. René De Cotret, L. Coulange (2002), Des environnements informatisés dédiés à l'étude des conditions d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques et à la formation des enseignants, *Actes du Colloque CIRTA, Acfas 2002*.

[Perrin-Glorian 1999] M.-J. Perrin-Glorian (1999), Problèmes d'articulation de cadres théoriques : l'exemple du concept de milieu. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Vol. 19.3, La Pensée Sauvage, Grenoble, 279-322.