

# Instruments de médiation sémiotique dans Cabri pour la notion de fonction

Rossana Falcade

Université J. Fourier de Grenoble, France

Cette présentation a comme objectif d'analyser le rôle de trois outils de Cabri en termes d' « instruments de médiation sémiotique » potentiels pour la construction de la notion de fonction. Ce type d'analyse représente une approche intéressante qui n'est ni exclusive ni une caractéristique donnée *a priori* d'un artefact. En effet, elle prend en compte un logiciel, où la correspondance entre l'artefact et le signifié à construire n'est pas immédiate<sup>1</sup>: un environnement de géométrie dynamique (EGD), Cabri-géomètre, est, en fait, utilisé pour l'apprentissage d'un concept typiquement analytique.

Les ingrédients fondamentaux de cette analyse sont, d'une part, la construction théorique « d'instrument », et, d'autre part, celle de « médiation sémiotique ». Dans la première partie, cette présentation cherchera à clarifier les signifiés attribués à ces deux termes.

Le travail, qui est présenté dans cette communication, est enraciné dans un projet didactique plus vaste, encore en cours, qui constitue l'objet de mon travail de thèse et qui est conduit sous la responsabilité de C. Laborde et M.A. Mariotti. Une description détaillée et définitive de cette recherche est encore prématurée et au-delà des buts de ce papier. Cependant, avant d'aborder l'analyse des outils de Cabri, il est nécessaire d'explicitier la façon spécifique dont nous avons pris en compte les signifiés mathématiques à médier. Dans la deuxième partie, nous allons, donc, décrire brièvement les hypothèses fondamentales de ce projet de construction de la notion de fonction.

Finalement, la dernière partie de cette présentation cherchera à exemplifier l'utilité de ce type d'analyse dans les phases de conception et implémentation d'une activité didactique particulière. Ensuite, l'analyse de deux rapports, faits par les élèves après cette activité, permettra de repérer le travail de construction des signifiés mathématiques en acte et de le relier aux hypothèses faites sur le potentiel de médiation sémiotique des outils de Cabri. Ceci nous permettra de porter un jugement sur « l'internalisation » éventuellement survenue des signifiés mathématiques attendus.

## Signes, artefacts, instruments et instruments de médiation sémiotique

Les hypothèses psychologiques, dérivées des travaux de Vygotski, sur lesquelles Bartolini-Bussi (1999) et Mariotti (2002) ont développé la théorie didactique centrée sur la notion de médiation sémiotique sont les suivantes :

- Le signe (appelé aussi “outil psychologique” par Vygotski (1978)) agit comme un outil de la pensée, de façon analogue à un outil technique. La différence par rapport à ce dernier est sa fonctionnalité : un outil technique est orienté vers l'extérieur et conduit à un changement des objets ; le signe, par contre, est orienté vers l'intérieur et il sert à maîtriser la personne même.
- Le processus de genèse d'un signe, appelé par Vygotski “processus d'internalisation”, est caractérisé par la “reconstruction interne d'une opération externe ” et par la “transformation d'un processus inter-personnel en un processus intra-personnel ”. C'est-à-dire que le signifié et la

---

<sup>1</sup> À différence, par exemple, de "Derive" ou de "Cabri-géomètre" (Laborde and Capponi, 1994) utilisés respectivement pour l'apprentissage de l'analyse ou de la géométrie euclidienne.

fonction d'un signe sont créés, premièrement par un geste (ou une situation) qui est extérieur au sujet et qui implique directement d'autres personnes.

L'hypothèse qui est faite d'un point de vue didactique, au sein de ce même paradigme, peut être synthétisée de la manière suivante :

- du côté de l'élève, l'outil est utilisé comme un outil technique pour accomplir une tâche ;
- du côté de l'enseignant, le même outil est impliqué dans une stratégie didactique pour construire de la connaissance. L'objectif didactique est alors celui d'obtenir « l'internalisation » de cet « outil technique » en un « outil psychologique » ou signe, qui est capable de renvoyer à un signifié mathématique précis.

Les théories récentes sur la genèse instrumentale, élaborées notamment par Rabardel (1995), n'ont contribué que partiellement à éclaircir ce processus d'internalisation. Grâce à la mise au point d'une définition psychologique d'instrument<sup>2</sup>, ces théories ont mis en lumière, en particulier, la distinction cruciale qui existe entre ce dernier et l'artefact<sup>3</sup> et ont focalisé l'attention sur l'analyse des schèmes d'utilisation qui lui sont associés.

Cependant, l'analyse en termes d'artefact/instrument, ne rend pas compte de toute la complexité d'un tel processus d'internalisation dans la construction de signifiés nouveaux (médiation sémiotique). Même l'analyse fine en termes de processus d'instrumentation et d'instrumentalisation, considère seulement certains aspects. En effet, ces processus concernent, respectivement, l'émergence et l'évolution, d'une part, des fonctions et des propriétés attribuées à l'artefact (instrumentalisation), d'autre part, des schèmes d'usage et d'action instrumentée (instrumentation). D'une part, donc, l'approche instrumentale est surtout cognitive, quasi exclusivement centrée sur le rapport personnel entre le sujet générique seul et l'artefact ; d'autre part, elle n'explicite pas les facteurs qui engendrent ces processus d'instrumentation et d'instrumentalisation.

Par contre, dans le processus d'internalisation inhérent à l'usage d'un instrument sémiotique, il y a un véritable changement de signification. En effet, l'émergence et l'évolution de signifiés mathématiques incorporés dans l'artefact (de même que la clarification de leur statut mathématique) transcendent tels processus d'instrumentation et d'instrumentalisation et font appel à d'autres éléments. En particulier, la construction de ces signifiés est toujours une construction sociale, qui implique la constitution d'un langage ou codage, nécessairement intersubjectif. Ceci sera fondé sur l'ambivalence d'activités spécifiquement mises en acte avec l'instrument et qui peuvent avoir au moins deux signifiés, l'un inhérent au monde l'artefact<sup>4</sup>, l'autre relatif au monde des mathématiques<sup>5</sup>. Voilà pourquoi, d'un point de vue didactique, dans la théorie de la médiation sémiotique, on a voulu intégrer au système minimal artefact-sujet (qui est dans ce cas, un véritable apprenant, non pas un sujet générique), au moins, deux autres sujets (l'enseignant et un autre apprenant).

---

2 L'instrument est défini par Rabardel (1995) comme une entité mixte, élaborée par le sujet, qui comprend d'une part, l'artefact, et d'autre part, ses schèmes d'utilisation (SU), éventuellement sociaux (SSU).

3 L'artefact est l'objet matériel ou symbolique en soi, comme le dispositif de pilotage d'un bras manipulateur d'un petit robot qui déplace des objets dans l'espace (Rabardel 1995)

4 Le terme "monde de l'artefact" se réfère au « monde des objets et des événements », expérimenté en Cabri et qui incorpore le domaine sémantique de l'espace et du temps. Ce terme est assez proche de celui utilisé par A. Tiberghien et évoqué par Buty (2000) dans sa thèse.

5 Le terme "monde des mathématiques" se réfère au domaine théorique relatif à la notion de fonction.

En utilisant une métaphore, on pourrait dire que, dans cette théorie, la dimension sociale (avec les interactions verbales) et l'organisation d'activités bien spécifiques agissent catalyseurs de tout le processus d'internalisation.

L'analyse que nous allons présenter ici se place donc à l'intersection de ces deux paradigmes théoriques. En effet, elle considère certains outils de Cabri, notamment les outils Déplacement, Trace et Macro, sous deux angles complémentaires :

- celui des « instruments » au sens de Rabardel, en repérant artefact et schèmes (sociaux) d'utilisation relative ;
- celui du « potentiel sémiotique » associé à ces instruments, dans une perspective vygotkienne de construction sociale du savoir.

### **Trajectoire, fonctions géométriques et appréhension dynamique d'un graphe de fonction**

L'élaboration d'une définition abstraite de fonction, en tant que correspondance entre deux ensembles, indépendante des domaines à modéliser, date du début du dix-neuvième siècle. Cette définition réfère à une notion statique qui a perdu toutes les relations avec l'intuition primitive liée au temps et au mouvement, telle qu'elle était considérée par Newton (Malik 1980). Pour cette raison, un problème crucial à l'école est que, même si les élèves ont l'idée d'une correspondance, ils ne perçoivent pas la co-variation entre deux variables, dépendantes l'une de l'autre. Très souvent, d'après eux, la fonction est la donnée d'une formule qui permet de calculer  $y(x)$  par un  $x$  donné, pour un ensemble discret et fini de valeurs. Pour la même raison, les élèves voient le graphe d'une fonction plutôt en termes de dessin ou d'objet statique, doué de certaines propriétés spatiales ou géométriques, tandis que son caractère « procédural » est devenu totalement opaque. Cela explique aussi la rupture didactique, très fortement aperçue, entre représentations algébrique ou numérique d'une part et graphique d'autre part : les premières portant sur le processus, l'autre sur l'objet.

Face à la complexité de ce sujet d'enseignement, plusieurs études ont été développées pour construire des situations didactiques riches et pertinentes. Par exemple, la situation "Graphiques et chemins" (Bloch 2000) mène justement à récupérer l'aspect procédural du milieu graphique, à travers le travail sur les fonctions en tant que objets mathématiques et sur la validation de leurs propriétés.

La clé pour accéder à une « appréhension dynamique » des concepts de fonction et de graphe de fonction nous a été fournie par la notion de trajectoire (qui est à la fois « une succession de positions d'un point qui bouge dans le temps » et « un objet en soi »). En fait, cette notion, développée au sein de l'étude de fonctions géométriques dans un EGD, peut être réinvestie et ainsi conduire à un concept de fonction, non seulement géométrique, qui incorpore une relation asymétrique de co-variation entre variables (Laborde et Mariotti 2001, Falcade 2002).

### **Instruments de médiation sémiotique dans Cabri**

#### **Déplacement ou Drag mode**

Le déplacement, ou Drag mode, d'un objet quelconque sur l'écran peut être indiqué comme l'instrument qui d'emblée marque et détermine le caractère dynamique de Cabri. La composante matérielle et symbolique, c'est-à-dire, l'artefact, est constituée par un ensemble de pixels opportunément activé sur l'écran. En revanche, son schème d'usage est l'action de déplacer.

Un tel instrument possède trois potentialités sémiotiques :

- en attribuant une position quelconque à un objet dans l'écran, il matérialise un des aspects les plus saillants de la notion de variable : sa "généricité";
- il évoque, de façon naturelle mais implicite, le temps et la variation pendant le temps.
- par la nature aussi instinctive de cet instrument, son empêchement produit chez le sujet la perception nette et de l'absence de liberté et de la présence de contraintes.

## Trace

L'artefact consiste en l'affichage à l'écran de la trajectoire suivie par un objet pendant son déplacement. Du point de vue graphique, la commande Trace conserve aussi une mémoire de la vitesse du déplacement, en dessinant une suite de points plus ou moins dense.

On peut lui associer trois schèmes d'usage :

- Schème 1 : déplacer un point qui laisse sa trace.
- Schème 2 : déplacer un point et d'obtenir la trace d'un autre point qui en dépend.
- Schème 3 : déplacer un point, qui laisse sa trace, et d'obtenir, aussi, la trace, d'une couleur différente, d'un autre point qui en dépend.

L'instrument *Trace1* (Trace+schème 1) peut extérioriser la notion de variation en termes d'une suite de changements d'état au cours du temps, et donc objectiver la dépendance fonctionnelle primitive : celle de l'espace par rapport au temps. En outre, *Trace1* extériorise graphiquement la liberté totale de la variable indépendante.

L'instrument *Trace2* (Trace+schème 2) porte sur la notion cruciale de variable dépendante. Au contraire de *Trace1*, il met en évidence le manque de degrés de liberté de cette dernière variable.

Par l'instrument *Trace3* (Trace+schème 3) le domaine et l'ensemble image d'une fonction peuvent être expérimentés comme trajectoires de points corrélés qui varient. Pour cela, en impliquant deux fois la notion de trajectoire, cet instrument peut constituer un médiateur sémiotique efficace pour «réifier» et rendre conscient le double rôle du temps incorporé dans la notion de co-variation.

## Macro

L'artefact est constitué par une «boîte à outils», qui permet soit la création, soit l'utilisation d'une macro construction, c'est-à-dire d'une construction géométrique définie par l'utilisateur et légitime pour Cabri.

On peut distinguer trois schèmes d'usage impliquant l'outil macro :

- Schème 1 : l'utilisateur applique une macro inconnue.
- Schème 2 : l'utilisateur applique une macro connue.
- Schème 3 : l'utilisateur crée une macro.

L'instrument *Macro1* (Macro+schème 1), comme l'instrument *Macro2* (Macro+schème 2) nécessitent l'explicitation des objets initiaux, tandis que les objets finaux sont créés par le logiciel, en appliquant une construction donnée. Les deux peuvent très bien signifier «l'instanciation» d'une fonction à une valeur

particulière; en revanche, seule l'utilisation combinée de tels ces instruments avec le déplacement peut montrer la « généralité » de la fonction.

Ce qui peut différencier *Macro1* et *Macro2*, c'est la tâche différente à accomplir, qui leur est normalement associée. Dans le cas de la macro inconnue, très souvent, *Macro1* est combiné avec *Trace2*, pour retrouver la macro cachée. La trajectoire doit être, alors, conçue comme l'ensemble de tous les points (ou le support de ce point) sur lesquels (sur lequel) la macro agit et dont on veut identifier l'action. On part, donc, d'une appréhension globale de la fonction, en termes de courbe géométrique, pour parvenir à une signification ponctuelle.

Au contraire, dans le cas d'une macro connue (schème 2), dont on connaît l'action point par point, ce qui est habituellement demandé, est d'en étudier l'effet sur tous les points d'un ensemble donné. La démarche est alors opposée : du ponctuel au général. *Macro2* associé à *Trace2* contribue à construire le signifié d'une fonction en termes d'une relation de co-variation entre variables, reliées par une certaine loi. Justement par le fait qu'on connaît le « processus générateur » de la variable dépendante, le statut de cette variable devient, par rapport à la simple utilisation de *Trace2*, mieux défini. *Macro2* associé à *Trace2* permet donc d'identifier les domaines de variation de la variable dépendante et indépendante.

L'instrument *Macro3* (Macro+schème 3) implique qu'à partir d'une construction faite par l'utilisateur, ceci définit des objets dépendant d'autres objets. En exigeant la désignation stricte des objets initiaux et finaux, *Macro3* rend explicite la distinction entre variables indépendante et dépendante. Il renvoie aussi à un aspect particulier de la notion de fonction : celle d'être une relation fonctionnelle entre variable indépendante et dépendante, qui est défini sur un objet particulier mais générique et qui, pour cette raison, est potentiellement applicable à tous les objets du même type.

En conséquence, *Macro3* peut contribuer à la construction du signifié de fonction en marquant les éléments constitutifs et en condensant<sup>6</sup> le processus en un objet. Il est important, à ce propos, de souligner que, comme dans le cas de la définition d'une fonction, pour valider une macro, il est exigé de lui assigner un nom.

### **Intérêt de notre approche pour la conception et l'analyse *a posteriori* d'activités didactiques**

Notre analyse des outils de Cabri en termes d'instruments de médiation sémiotique a conduit à la conception et à la réalisation de trois séquences didactiques. Deux pré-expérimentations ont été réalisées en France et une expérimentation définitive a été réalisée en Italie. Il s'agit, pour chaque séquence, d'une suite d'environ dix séances avec Cabri, mises en place dans une classe de Seconde (ou de niveau scolaire analogue en Italie), où les élèves travaillaient en binômes et ils avaient une certaine familiarité avec Cabri. En particulier, lors de la dernière expérimentation, nous avons demandé aux élèves de prendre part, après chaque séance, à une discussion collective et de rédiger à la maison un rapport individuel. Les élèves avaient la consigne d'écrire et justifier, d'une part, ce qu'ils avaient vécu et compris en classe, d'autre part, tous les doutes et les questions survenus. Selon les termes du contrat didactique, tout ce qui était écrit devait être ponctuellement justifié et il devenait l'objet des discussions ultérieures.

Ce que nous présentons ici est seulement le début de la dernière séquence expérimentale. Il s'agit des trois premières activités, où les élèves ont été mis, pour la première fois et sans le savoir, face à un travail avec les fonctions géométriques dans Cabri.

---

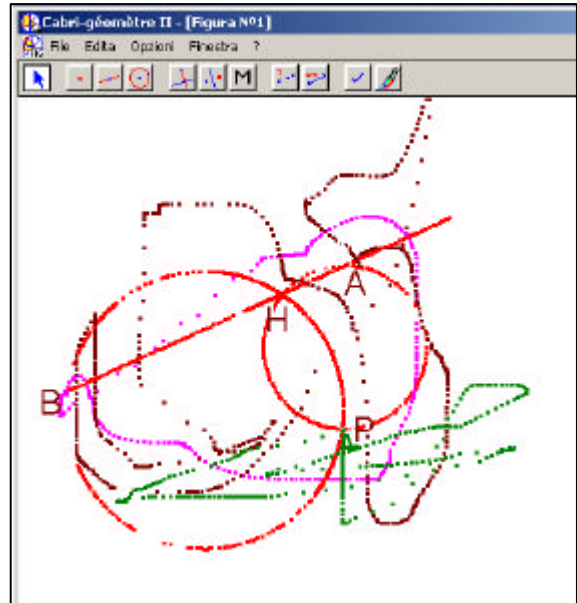
<sup>6</sup> Nous utiliserons ici le mot « **condensation** » au sens de A. Sfard (1991). Il s'agit du deuxième niveau de formation et structuration d'un concept : celui de la compression d'une longue séquence d'opérations en unités plus maniables. C'est à ce stade que Sfard situe la naissance « officielle » du concept.

Dans la première question, nous avons demandé aux élèves de créer trois points A, B et P, de leur appliquer la macro-construction inconnue « Effect1 » (qui était préenregistrée sur leurs écrans) et de vérifier qu'un quatrième point, appelé H, apparaissait. Nous leur avons aussi demandé d'essayer de bouger tous les points qui étaient sur l'écran et de noter lesquels pouvaient être déplacé ou non.

“Effect1” agit comme une boîte noire qui, à partir de trois points donnés, A, B, P, construit un quatrième point, H, obtenu comme projection orthogonale de P sur la droite (AB). Cette première question visait à introduire l'instrument *Drag mode*.

Dans la deuxième question, il était demandé aux élèves de décrire en termes géométriques la trajectoire suivie par les différents points et d'utiliser l'outil Trace pour la matérialiser.

Cette deuxième question visait à actualiser les instruments *Trace1* et *Trace2*. La consigne de décrire la trajectoire des points différents en termes géométriques répondait à l'exigence que les élèves passent d'une simple observation perceptive d'une trace laissée sur l'écran à une re-élaboration en termes géométriques.



Finalement, la troisième question demandait aux élèves de découvrir et de re-crée eux-même la macro-construction cachée dans « Effect1 ». L'objectif de cette dernière question était de mobiliser les instruments *Macro1* et *Trace2*.

Tous les élèves ont répondu à ces trois premières questions en utilisant les outils fournis exactement selon leur usage original : bouger des points, relever des traces et découvrir la macro cachée. Par exemple, Mattia et Nicola ont ainsi écrit :

“- En bougeant A extérieurement au segment B-P de P vers B et de B vers P, H trace une circonférence qui inclut en elle-même, en plus de H, les points B et P ces derniers étant les extrémités du diamètre.

- En bougeant B extérieurement au segment A-P de P vers A et de A vers P, on a une circonférence tracée par H, qui inclut, de plus de H, A et P, ces derniers étant les extrémités du diamètre.

- En faisant le même mouvement avec P et en pouvant bouger dans un plan infini, on aura une droite qui passe par A et B, autrement, il se déplacera sur une droite imaginaire passant par A et B mais elle couvrira une distance égale aux deux points plus éloignés de P qui sont sur une droite par P parallèle à celle qui passe par A et B. »

En termes Vygotskiens, on peut dire que, à ce niveau, les instruments fonctionnent seulement comme outils techniques. Naturellement, le lien entre ces activités et la notion de fonction (outils psychologiques) est complètement obscur et inaccessible.

### **Le début d'un changement de signifié, à travers le filtre de deux rapports individuels**

Lors de la séance qui a suivi les activités illustrées précédemment, la classe a pris part à une discussion collective où tous les binômes ont partagé leur propre expérience. L'enseignant, pour sa part, a dépersonnalisé et décontextualisé les vécus de chaque paire. Également, en revisitant toute la séance, il a

établi une sorte de traduction basée sur l'ambivalence de ces activités dans les deux mondes, celui de l'artefact et celui des mathématiques. Des termes nouveaux comme variable indépendante et dépendante, domaine et image ont ainsi été introduits et associés aux éléments de l'activité dans Cabri.

Il n'a pas été possible de synthétiser en quelques lignes, l'analyse de cette première discussion. Nous avons, donc, choisi de montrer ce qui s'est passé dans Cabri et ce qui a été dit lors de la discussion à travers le filtre de deux rapports individuels<sup>7</sup>. En fait, il nous semble qu'il est possible de cette façon d'une part, d'accéder à ce qui a véritablement frappé les élèves et qui a été effectivement internalisé, d'autre part, de détecter le processus en cours de changement de signification des instruments impliqués.

Dans son rapport, Igor écrit :

*« Lors de la dernière séance, nous avons abordé le sujet des fonctions [1]. Nous sommes partis de trois points dans Cabri et nous leur avons donné un certain effet, appelé «Effet1 » [2] qui représente notre fonction [3] et qui a dessiné un autre point [4]. Nous avons vu que, en bougeant les trois points dessinés avant [5], le quatrième point se déplaçait sur des circonférences particulières et sur une droite qui impliquait les trois premiers points [6].*

*En discutant de ça [7], nous avons compris que la fonction est une relation qui implique plusieurs éléments et qui permet de relier les premiers éléments aux deuxièmes en leur faisant faire quelque chose. [8]. Celle-ci est une définition un peu brute et, en fait, nous ne sommes pas encore arrivés à la définition mathématique de fonction [9]. Dans notre cas [10], la fonction [11] permettait de faire bouger le quatrième point en déplaçant les autres [12]. Mais le quatrième point ne pouvait pas être déplacé directement, en le prenant avec la souris [13]. Nous avons compris que les premiers trois points, appelés A, B, P sont dans notre cas [14] appelés variables indépendantes [15], l'autre point, H, par contre est appelé variable dépendante [16] car il dépend de A, B, P [17]. A, B, P se déplacent sur le plan [18] et le « lieux » où les variables indépendantes bougent est appelé « Domaine » [19], celui où H (variable dépendante) bouge [20] est appelé « Image » [21]. Nous avons vu que H formait deux circonférences de diamètre AP et BP [22] et que si celles-ci étaient superposées le point H disparaissait. [...]».*

Déjà la structure du rapport est très intéressante. Igor est conscient qu'il est en train de faire des mathématiques et que tout ce qu'il fait dans Cabri a une correspondance dans le monde des mathématiques ([1], [3]). D'abord, il décrit le monde de l'artefact, il évoque l'utilisation de **Macro1** ([2], [4]), **Drag mode** [5], et **Trace2** [6], puis il s'arrête, il va à la ligne et il commence à décrire ce qu'il considère comme le signifié mathématique impliqué. Sa formulation n'appartient pas au « monde de l'artefact » : il parle d'éléments, non pas de points ; il se réfère à une relation qui leur fait faire quelque chose, non pas à un mouvement produit par le Déplacement [8]. Sa formulation n'appartient pas non plus au « monde des mathématiques » [9]. Elle émerge de l'internalisation et de l'appropriation du sens de l'activité tel qu'il a émergé lors de la discussion [7]. Ensuite Igor retourne à la description de l'activité dans le « monde de l'artefact » et évoque l'usage de **Macro1** et **Drag mode** [12]. Mais, d'après lui, ces instruments commencent à signifier quelque chose d'autre ; tout ce qui est expérimenté dans Cabri correspond à une « instance » particulière du concept de fonction (en fait il commence avec « Dans notre cas... » [10]) et il utilise un mot du monde des mathématiques («...la fonction... » [11]). Ici, nous pouvons déjà détecter un changement embryonnaire de signification de ces instruments et une actualisation de leur potentiel sémiotique. Le déplacement impossible commence à caractériser la variable dépendante[13],

---

<sup>7</sup> Les rapports ont été rédigés à la maison individuellement et successivement. Vu le contrat didactique déjà bien établi et l'expérience de la classe impliquée pendant déjà deux années en expérimentations didactiques similaires, il est très raisonnable de supposer que tous les textes fournis par les étudiants sont authentiquement les leurs.

tandis que la relation de dépendance fonctionnelle est perçue en termes de co-variation entre objets [12]. Les termes mathématiques de variables indépendantes et dépendantes, de domaine et d'image commencent à être associés à certains éléments de l'activité dans Cabri ([15], [16], [19], [21]). Pourtant, il y a toujours la conscience que tous ces objets et actions ont un équivalent dans le concept mathématique de fonction. Igor, en fait, observe à nouveau "...dans notre cas..." [14]. Nous pouvons remarquer comment cette activité fonde la construction du signifié de dépendance logique sur celui de dépendance causale [17]; tandis que le signifié de domaine et image sont fondés sur l'ambivalence de l'idée de trajectoire, qui est en même temps la trace d'un point qui bouge ([18], [20]) et un ensemble géométrique perçu globalement [22].

Mattia par contre écrit :

*« Je n'ai pas une définition précise de fonction [1], je pense que c'est une « situation » qui se vérifie en géométrie et qui a certain lien avec l'algèbre[2], plutôt je pense (et j'en suis assez convaincu) que si pour les fonctions on utilise trois points quelconques, elles peuvent être « vues » chaque fois qu'il y a trois points [3], en plus parce qu'on peut facilement trouver le quatrième point qui sera en fonction des trois premiers [4]; je ne comprends, pourtant pas comment on peut faire pour déterminer le mouvement [5] de la variable dépendant du déplacement des variables indépendantes [6] en le désignant sur une feuille de papier...[7]*

*Ce que nous avons fait jusqu'à maintenant sur l'ordinateur [8] concernait trois points A, B, et P que nous allons appeler « variables indépendantes », car on peut les bouger, à n'importe quel moment et partout où l'on veut, même en même temps [9], mais sans d'abord leur avoir « dit » où [10]. Tous les points où les variables indépendantes se déplacent [11] (dans notre cas tout le plan) [12] sont appelés « domaine » [13] (mais je n'ai pas compris si le domaine est tous les points, où l'on peut bouger les v.i. [14] ou les points que les v. i. tracent une fois qu'elles ont été bougés [15]); puis, avec un outil du programme nous avons créé un troisième point H, que nous allons appeler « variable dépendante » [16], qui bougeait sur le plan en fonction des trois premiers points [17]. En bougeant un des premiers points, par exemple A, H se déplaçait tout au long d'une trajectoire précise [18], appelée « image » [19] (ici aussi je n'ai pas compris si les images sont les circonférences ou la droite [20], c'est-à-dire les seuls points où la v. d. est obligée à se déplacer [21], ou, au contraire, les points qu'elle trace en se déplaçant [22], par exemple un arc ou un segment [23]) et il décrivait une circonférence [24], qui incluait les autres deux points aussi, comme extrémités du diamètre.[...] ».*

Mattia est très conscient que ce qu'il a fait jusqu'à maintenant est insuffisant pour pouvoir produire une définition assez exhaustive de fonction [1]. Il est aussi convaincu que la définition à laquelle il faut aboutir doit être indépendant de l'artefact et de la situation particulière expérimentée dans Cabri; c'est pour cela qu'il propose une formulation [2] qui est assez générale, décontextualisée, même trop vague. Cependant, quand il cherche à repérer une généralisation opportune de la notion de fonction, qui soit valable quelque soit l'activité spécifique, sa caractérisation est encore extrêmement tributaire de l'activité même et du monde de l'artefact. D'une part, cela le conduit à supposer que, pour avoir une fonction, il faut toujours disposer de trois points libres [3] et d'un quatrième point qui en dépende [4]. La nature de la variable dépendante est, à ce propos, marquée profondément par le mouvement [5] et par la dépendance de ce mouvement par rapport au déplacement des variables indépendantes [6]. Les instruments *Drag mode* et *Trace2* s'avèrent ici avoir un poids déterminant. D'autre part, cette même caractérisation lui pose le problème de son extension à d'autres environnements qui ne soient pas dynamiques [7].

Comme dans le cas d'Igor, après avoir fourni une caractérisation générale de la notion de fonction, Mattia va à la ligne et commence à décrire ce qui a été fait dans Cabri [8]. Il évoque l'utilisation des outils *Drag mode* et *Trace1* avec leurs potentialités sémiotiques. Nous pouvons ici détecter certaines connotations qui commencent à identifier les variables indépendantes : d'une part leur «généricité» potentielle [9]; d'autre part, l'exigence de les instancier [10] pour pouvoir les représenter.

Les termes «domaine» [13], «variable dépendante» [16] et «image» [19] sont profondément caractérisés par l'activité dans Cabri et notamment l'utilisation des instruments *Trace1*, *Trace2* et *Macro1*. La trajectoire se révèle avoir effectivement la double acception attendue de «suite de positions d'un point qui bouge» ([11], [14], [18], [21], [22]) et «d'objet perçu globalement» ([12], [23], [24]). Cela permet à Mattia de construire une idée de domaine et d'image qui incorpore à la fois la dimension dynamique de co-variation entre variables et la dimension statique d'objet mathématique doué de propriétés spécifiques. Comme dans le cas d'Igor, la relation de dépendance logique de la variable dépendante [17] va se fonder sur celle de type «cause-effet». L'expression «...*en fonction de*...», dérivée du langage courant mais associée à l'activité, fait le pont entre une notion qui est encore très générale, vers une notion qui sera de plus en plus mathématique.

Le rapport de Mattia est intéressant surtout pour les questions qu'il se pose. Il se demande si les trajectoires qui identifient le domaine et l'image de la fonction sont les trajectoires actuelles ([15], [22]), ou bien les trajectoires potentielles ([14], [21]). Ces questions sont le symptôme d'une véritable recherche (favorisée, peut-être, par un contrat didactique clair) du lien interprétatif entre l'activité particulière avec Cabri (monde de l'artefact) et le monde des mathématiques.

Ce genre de question est aussi révélateur d'un problème qu'il est nécessaire de considérer quand on élabore des activités de ce type. L'établissement d'une traduction entre ce qui se passe au sein de l'artefact et le signifié mathématique relatif n'est pas une opération univoque. Il peut y avoir plusieurs interprétations mathématiquement consistantes. C'est l'enseignant lui-même qui prendra soin de favoriser, parmi tous les signifiés mathématiquement possibles, celui qui est effectivement impliqué dans l'activité. Ceci se produira à travers les discussions collectives et d'autres activités différentes qui au fur et à mesure vont pouvoir mieux délimiter et enrichir le champ sémantique des mots introduits.

Seulement en observant les écrits d'Igor et Mattia, il est déjà évident qu'il existe une grande diversité entre les rapports des différents élèves. Chacun témoigne, à sa façon, d'un processus particulier d'apprentissage qui ne consiste pas à répéter ce qui a été dit par l'enseignant mais relève d'une construction personnelle. Les observations des productions d'Igor et de Mattia ne peuvent donc pas être généralisées d'emblée à ceux d'autres élèves. Cependant, à partir de ces deux exemples, il est possible d'entrevoir comment l'analyse de Cabri en termes d'instruments de médiation sémiotique se révèle un outil efficace d'interprétation *a posteriori* du processus d'apprentissage en acte.

Par la même méthodologie d'analyse nous avons ainsi pu mettre en évidence et décrire des processus de changement de signification et d'internalisation, analogues à ceux d'Igor et de Mattia, sur quinze des dix-sept rapports rendus<sup>8</sup> : les résultats, même partiels, sont assez encourageants.

## Conclusion

---

<sup>8</sup> Les deux rapport que nous avons pas pu considérer comme révélateurs de ces mêmes processus, sont ceux relatifs à deux élèves qui ont été absents et qui ont rendu plus tard une production qui était soit très insuffisante, soit manifestement influencée par d'autres personnes.

Dans ce papier, nous avons présenté l'analyse de trois outils de Cabri, en termes de médiateurs sémiotiques pour la notion de fonction. Nous avons aussi montré l'utilité de ce type d'analyse pour la conception d'une séquence d'activités didactiques *ad hoc*.

Après la première activité avec Cabri et la première discussion consécutive, nous avons montré qu'il est déjà possible de repérer le changement de signification des instruments impliqués et la coexistence de deux mondes, celui de l'artefact et celui des mathématiques. Les termes introduits par l'enseignant et utilisés par les élèves, en particulier dans leurs rapports individuels, ont en vérité, encore un champ sémantique assez circonscrit à l'artefact. Le travail de construction des signifiés mathématiques associés au potentiel sémiotique de ces instruments est donc loin d'être accompli ; cependant, il se révèle déjà très riche. Par contre, la manière, dont l'activité de discussion préalable à l'écriture des rapports a contribué à ce changement de signification, demeure encore une question de recherche intéressante.

## Références

- Bartolini Bussi M. G. – Boni M. – Ferri F. – Garuti R. (1999): Early Approach to theoretical thinking: gears in primary school. *Educational Studies in Mathematics*, vol. 39 (1-3), 67-87.
- Bloch I. (2000) : *L'enseignement de l'analyse à la charnière lycée/université : connaissances, savoirs et conditions relatives à la validation*. Thèse de Doctorat d'Etat, Université Bordeaux I, Bordeaux.
- Buty, C. (2000): *Etude d'un apprentissage dans une séquence d'enseignement en optique géométrique à l'aide d'une modélisation informatique*. Thèse de Doctorat d'Etat, Université Lumière – Lyon II, Lyon.
- Falcade R. (2002) : Cabri-géomètre outil de médiation sémiotique pour la notion de graphe de fonction, *Petit x*, 58, 47-81.
- Laborde C. – Capponi B. (1994): Cabri-Géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 14 (1.2), 165-210.
- Laborde C. – Mariotti M. A. (2001) : Grounding the notion of function in a DGS, *Proceedings of Cabri World 2001*, Montréal, Canada.
- Malik M.A. (1980) : Historical and pedagogical aspects of the definition of function. *International journal of mathematics education in science and technology* , 11 (4), 489 –92
- Mariotti M. A. (2002): Influence of technologies advances on students' math learning. In: English L. - Bartolini Bussi M. G. – Jones G. - Lesh R. & Tirosh, D. (eds.), *Handbook of International Research in Mathematics Education*. Lawrence Erlbaum Associates in press.
- Rabardel P. (1995): *Les hommes et les technologies, un approche des instruments contemporaines*. Armand Colin, Paris.
- Sfard A. (1991): On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, vol. 22 (1), 3-22.
- Vygotski, L. (1978): *Mind in Society*. Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts.