

# Sur certaines singularités non isolées d'hypersurfaces I.

Daniel Barlet

6/12/05 .

## Abstract.

The aim of this first part is to introduce, for a rather large class of hypersurface singularities with 1 dimensional locus, the analog of the Brieskorn lattice at the origin (the singular point of the singular locus). The main results are the finiteness theorem for the corresponding  $(a,b)$ -module obtained via Kashiwara's constructibility theorem, and non torsion results for a plane curve singularity (not necessarily reduced) and for the suspension of such non torsion cases with an isolated singularity.

**Key words.** Hypersurface singularity, 1 dimensional singular locus, Brieskorn module,  $(a,b)$ -module, formal microlocal operators.

**Classification.** 32 S 05, 32 S 25, 32 S 40 .

## 1 Introduction

L'objectif de cet article est de mettre en place, dans le cadre de fonctions à lieu singulier de dimension 1, avec des hypothèses assez restrictives mais donnant accès à beaucoup d'exemples non triviaux, l'analogie de la théorie de E. Brieskorn pour une fonction à singularité isolée (voir [Br.70]).

Ce premier volet est centré sur la construction de l'analogie du module de Brieskorn associé à l'origine (qui est le point singulier du lieu singulier de  $f = 0$ ) et les principaux résultats obtenus sont

- 1) Le théorème de finitude 3.1.1.
- 2) Le théorème de non torsion pour les courbes planes non nécessairement réduites 4.2.2.

- 3) La stabilité de l'absence de torsion par suspension avec une fonction à singularité isolée (Proposition 4.3.3.)

Le théorème de finitude nous permet d'attacher à une fonction vérifiant notre hypothèse (HI) un (a,b)-module à l'origine. Malheureusement, le calcul du rang de ce (a,b)-module, qui donne la dimension du  $n$ -ième groupe de cohomologie de la fibre de Milnor de  $f$  à l'origine, fait intervenir la torsion éventuellement présente. Quand cette torsion est nulle, on obtient une jolie formule généralisant celle de J. Milnor pour le cas d'une singularité isolée.

Nous donnons alors des conditions simples pour assurer l'annulation de cette torsion. D'où l'intérêt des résultats 2) et 3) de non torsion.

Le second volet (voir [B.04 b]) s'attaquera à une version filtrée du phénomène d'interaction de strates consécutives étudié dans [B.91]. Ceci nécessitera au préalable la généralisation au cas de la valeur propre 1 les résultats de loc. cit.

Cette généralisation est décrite dans [B.04 a], mais nécessite l'étude d'une situation à trois strates ; on consultera l'introduction de [B.05] pour des commentaires plus détaillés sur les interactions de strates.

## 2 Pré-(a,b)-Modules.

### 2.1 Généralités.

**Définition 2.1.1** Soit  $E$  un espace vectoriel complexe muni d'endomorphismes  $a$  et  $b$ . On pose

$$B(E) = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \text{Ker } b^m \quad \text{et} \quad A(E) = \{x \in E / \mathbb{C}[b].x \subset \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \text{Ker } a^m \}$$

On dira que  $E$  est un **pré-(a,b)-module** lorsque les conditions suivantes sont vérifiées

- i)  $a.b - b.a = b^2$  .
- ii) Pour tout  $\lambda \in \mathbb{C}^*$ ,  $b - \lambda$  est bijectif dans  $E$ .
- iii)  $\exists N \in \mathbb{N} \mid a^N.A(E) = 0$ .
- iv)  $B(E) \subset A(E)$  .
- v)  $\bigcap_{m \in \mathbb{N}} b^m(E) \subset A(E)$  .
- vi) Le noyau et le conoyau de  $b$  sont de dimensions finies sur  $\mathbb{C}$ . □

On dira que  $E$  est **sans torsion** (en fait sans  $b$ -torsion) si on a de plus  $\text{Ker } b = 0$  ce qui équivaut à  $B(E) = 0$ . Dans ce cas la condition  $B(E) \subset A(E)$  devient triviale. Mais il resultera du lemme 2.1.2 que dans ce cas on a également  $A(E) = 0$ .

**Remarques.**

- 1) Un  $(a,b)$ -module, c'est à dire un  $\mathbb{C}[[b]]$ -module libre de type fini muni d'un endomorphisme  $\mathbb{C}$ -linéaire  $a$  vérifiant la relation de commutation i), est un pré- $(a,b)$ -module. En effet l'injectivité de  $b$  donne la nullité de  $B(E)$ ; donc la condition iv) est triviale. La  $b$ -complétion, qui implique la  $b$ -séparation, donne la condition v) et la condition ii). La condition vi) est également évidente. Il reste à montrer la condition iii). Montrons directement que l'on a  $A(E) = 0$  dans ce cas.

Soit  $x \in A(E)$  vérifiant  $a.x = 0$ . Alors on doit avoir  $a^n.bx = 0$  pour  $n \in \mathbb{N}$  assez grand. Mais si on a  $a.x = 0$  et  $a^n.bx = 0$  on en déduit que  $a^{n-1}.(ba + b^2).x = 0$  d'où  $a^{n-1}.b^2x = 0$  puis  $a^{n-p}.b^p x = 0$  pour  $p = 1, \dots, n$ . On a donc  $b^n.x = 0$  d'où  $x = 0$  puisque  $b$  est injective. Comme, par définition,  $a$  est nilpotente sur  $A(E)$  on en conclut que  $A(E) = 0$  pour un  $(a,b)$ -module. La condition iii) est donc trivialement vérifiée dans ce cas.

- 2) Grâce à la condition ii), un pré- $(a,b)$ -module est un module sur le localisé  $\mathbb{C}[b]_0$  de l'anneau  $\mathbb{C}[b]$  par rapport à l'idéal maximal engendré par  $b$ .
- 3) On remarquera que, par définition,  $A(E)$  est stable par  $b$  et que  $x \in A(E)$  si et seulement si  $\forall p \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N} / a^n.b^p.x = 0$ . On en déduit que  $A(E)$  est stable par  $a$  car si on a  $a^N.b^p.x = a^N.b^{p+1}.x = 0$  alors

$$a^N.b^p.ax = a^N.(a.b^p - p.b^{p+1}).x = 0.$$

**Lemme 2.1.2** *Si  $E$  est un pré- $(a,b)$ -module, alors  $A(E)$  est un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie. De plus on a l'égalité  $B(E) = A(E)$ .*

*Preuve.* Comme  $A(E)$  est stable par  $a$  et  $b$  l'égalité  $a^N.A(E) = 0$  donne  $b^{2N}.A(E) = 0$ . En effet la relation de commutation i) implique la formule

$$N!b^{2N} = \sum_{j=0}^N (-1)^j \binom{j}{N}.b^j a^N b^{N-j}.$$

Elle est établie dans [B.95] p.24.

L'égalité  $B(E) = A(E)$  s'en déduit en constatant que dans le quotient  $A(E)/B(E)$  l'endomorphisme  $b$  est à la fois injectif, puisque  $bx \in B(E)$  implique  $x \in B(E)$ , et nilpotent, puisque  $b^{2N}.A(E) = 0$ .

Montrons que l'espace vectoriel  $B(E) = A(E)$  est de dimension finie. On a pour chaque  $\nu \in \mathbb{N}$  la suite exacte de  $\mathbb{C}$ -espaces vectoriels :

$$0 \rightarrow \text{Ker } b \longrightarrow \text{Ker } b^{\nu+1} \xrightarrow{b} \text{Ker } b^{\nu} \quad ;$$

elle donne, par récurrence, grace à la finitude de  $\text{Ker } b$ , la finitude de la dimension de  $\text{Ker } b^{\nu} \quad \forall \nu \in \mathbb{N}$ . Mais on a  $A(E) \subset \text{Ker } b^{2N}$ . ■

**Remarques.**

- 1) La preuve des assertions  $b^{2N}A(E) = 0$  et  $B(E) = A(E)$  dans le lemme 2.1.2 n'utilise pas la condition de finitude vi) pour  $E$ .
- 2) Le lemme précédent donne également, sans utiliser la condition vi) pour  $E$ , la  $b$ -séparation, c'est à dire la nullité de  $\cap_{m \geq 0} b^m(E)$ . En effet, si  $x \in \cap_{m \geq 0} b^m(E)$  on peut trouver  $y \in E$  vérifiant  $b^{2N}.y = x$ . Mais comme  $x \in B(E)$  on a également  $y \in B(E) = A(E)$ , et donc  $b^{2N}.y = x = 0$ . Les propriétés i) à v) seules, suffisent donc à assurer la  $b$ -séparation de  $E$ , et donc son injection dans son complété  $b$ -adique, sans avoir à quotienter par  $A(E) = B(E)$ , c'est à dire par la  $b$ -torsion. Ceci s'applique, en particulier, à la situation de la proposition 2.3.1, ce qui couvre tous les cas issus de singularités d'une fonction holomorphe (arbitraire) que nous considérerons.
- 3) La  $a$ -torsion de  $E$ , qui est le sous-espace vectoriel  $\tilde{A}(E) := \bigcup_{m \in \mathbb{N}} Ker a^m$ , peut être strictement plus gros que  $A(E)$  et ne pas être stable par  $b$  même dans le cas d'un  $(a,b)$ -module. Prendre par exemple le  $(a,b)$ -module  $\mathbb{C}[[b]]$ -libre de rang 1 et de générateur noté  $e$  dont l'application  $a$  est définie par  $a.e = 0$  (alors  $ab^n.e = n.b^{n+1}.e \quad \forall n \in \mathbb{N}$ ).
- 4) À titre d'exercice, le lecteur pourra montrer que pour un pré- $(a,b)$ -module régulier (voir 2.2.1) l'espace vectoriel  $\tilde{A}(E)$  est toujours de dimension finie (il suffit en fait de traiter le cas d'un  $(a,b)$ -module à pôle simple).
- 5) Nous montrerons au lemme 2.3.2 que pour les pré- $(a,b)$ -modules associés aux systèmes de Gauss-Manin d'un germe de fonction holomorphe on a toujours l'égalité  $\tilde{A}(E) = A(E)$  grace au théorème de positivité de B. Malgrange [M.74].

**Proposition 2.1.3** *Soit  $E$  un pré- $(a,b)$ -module. Le complété  $b$ -adique  $\mathcal{L}(E)$  du quotient  $E/A(E)$  est un  $(a,b)$ -module (voir plus haut ou bien [B.93], [B.95] ou [Be. 01]). L'application  $(a,b)$ -linéaire naturelle*

$$E \longrightarrow \mathcal{L}(E)$$

*a pour noyau  $B(E) = A(E)$  ; elle est continue et d'image dense pour la topologie  $b$ -adique.*

*Preuve.* D'après ce qui précède,  $b$  est injective sur  $E/A(E)$  qui est séparé pour la filtration  $b$ -adique d'après la condition v). Pour conclure il suffit de voir que le conoyau de  $b$  agissant sur  $E/A(E)$  est de dimension finie sur  $\mathbb{C}$ . Ceci est clair puisque c'est un quotient de  $E/bE$ . ■

**Définition 2.1.4** *Nous appellerons **rang** du pré- $(a,b)$ -module  $E$ , noté  $rg(E)$ , le rang (comme  $\mathbb{C}[[b]]$ -module libre) du  $(a,b)$ -module  $\mathcal{L}(E)$  qui lui est associé.*

On remarquera que si  $\delta := \dim Ker b$ , on a  $rg(E) = \dim E/b.E - \delta$ , puisque  $B(E)$  est de dimension finie.

## 2.2 Régularité et produit tensoriel.

**Définition 2.2.1** Nous dirons qu'un pré-(a,b)-module  $E$  est **local**, respectivement **à pôle simple**, respectivement **régulier**, quand il vérifie :

- **Local** :  $\exists l \in \mathbb{N}^*$  tel que  $a^l.E \subset b.E$  .
- **À pôle simple** :  $l = 1$  dans la condition précédente, c'est à dire  $a.E \subset b.E$  .
- **Régulier** :  $\exists k \in \mathbb{N}^*$  tel que  $a^k.E \subset \sum_{j \in [0, k-1]} b^{k-j}.a^j.E$  . □

**Remarques.**

- On a, bien sur, "pôle simple"  $\Rightarrow$  "régulier"  $\Rightarrow$  "local".
- Il est équivalent de demander que  $E$  soit local (resp. régulier), ou bien que  $E/B(E)$  soit local (resp. régulier), ou encore que  $\mathcal{L}(E)$  le soit.

**Définition 2.2.2** Soient  $E$  et  $F$  deux pré-(a,b)-modules ; alors le produit tensoriel

$$E \otimes_{\mathbb{C}[b]_0} F$$

muni de l'application  $\mathbb{C}$ -linéaire  $a := (a_E \otimes 1_F + 1_E \otimes a_F)$  sera appelé "produit tensoriel" de  $E$  et  $F$  et noté simplement  $E \otimes_{a,b} F$  ou plus simplement  $E \otimes F$  quand il n'y a pas d'ambiguïté. □

**Proposition 2.2.3** Soient  $E$  et  $F$  deux pré-(a,b)-modules locaux ; alors  $E \otimes_{a,b} F$  est également un pré-(a,b)-modules local. Si de plus  $E$  et  $F$  sont réguliers (resp. à pôles simples) alors  $E \otimes_{a,b} F$  est régulier (resp. à pôle simple).

*Preuve.* La condition i) se vérifie facilement. La condition ii) est immédiate. Pour montrer la condition iv), commençons par prouver que l'on a

$$B(E \otimes F) = B(E) \otimes F + E \otimes B(F) .$$

L'inclusion  $B(E) \otimes F + E \otimes B(F) \subset B(E \otimes F)$  est claire. Montrons l'inclusion opposée. Soit  $z \in B(E \otimes F)$ . Posons  $z = \sum_{i \in I} x_i \otimes y_i$  où  $I$  est fini, et notons par  $E_1$  et  $F_1$  les sous- $\mathbb{C}[b]_0$ -modules engendrés par les  $(x_i)_{i \in I}$  et les  $(y_i)_{i \in I}$  respectivement. Comme, par définition,  $E_1$  et  $F_1$  sont des  $\mathbb{C}[b]_0$ -modules de type finis, ils sont somme directe de leur torsion et d'un module libre de type fini. On en conclut aisément que l'on a  $B(E_1 \otimes F_1) \simeq (B(E_1) \otimes F_1) + (E_1 \otimes B(F_1))$  ce qui nous donne  $z \in B(E) \otimes F + E \otimes B(F)$ .

On en conclut que  $B(E \otimes F) \subset A(E \otimes F)$  en remarquant que si  $N \in \mathbb{N}$  est assez grand pour que l'on ait  $a^N.B(E) = 0 = b^N.B(E)$  ainsi que  $a^N.B(F) = 0 = b^N.B(F)$  et si  $M \in \mathbb{N}$  est assez grand pour que l'on ait  $a^M.E \subset b.E$  ainsi que  $a^M.F \subset b.F$  on aura

$$a^{M.N+N}.(B(E) \otimes F + E \otimes B(F)) = 0$$

puisque

$$a^{M.N+N} \cdot (B(E) \otimes F) \subset \sum_{p \in [0, N]} a^p \cdot B(E) \otimes a^{M.N} \cdot F \subset B(E) \otimes b^N \cdot F = b^N \cdot B(E) \otimes F.$$

Comme  $B(E \otimes F)$  est stable par  $b$  l'inclusion  $B(E \otimes F) \subset A(E \otimes F)$  est vérifiée. Maintenant, grace à ce qui précède, pour  $N \in \mathbb{N}$  assez grand,  $B(E \otimes F)$  sera un quotient de

$$(B(E) \otimes (F/b^N \cdot F)) \oplus (E/b^N \cdot E) \otimes B(F)$$

ce qui prouve la finitude de  $\text{Ker } b \subset B(E \otimes F)$ .

La finitude sur  $\mathbb{C}$  de  $\text{Coker } b$  dans  $E \otimes_{a,b} F$  est élémentaire.

Montrons maintenant que  $E \otimes_{a,b} F$  vérifie la condition iii) de la définition 2.1.1. D'après ce qui précède on a un isomorphisme (a,b)-linéaire

$$E \otimes_{a,b} F / B(E \otimes_{a,b} F) \simeq E/B(E) \otimes_{a,b} F/B(F).$$

Considérons maintenant  $z \in A(E \otimes F)$  et supposons que  $a.z \in B(E \otimes F)$ . Comme  $b.z \in \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \text{Ker } a^m$  il existe  $m \in \mathbb{N}$  tel que  $a^m \cdot b.z = 0$ . On obtient alors  $a^{m-i} b^{i+1} \cdot z \in B(E \otimes F), \forall i \in [0, m]$ , d'où  $b^{m+1} \cdot z \in B(E \otimes F)$  et donc  $z \in B(E \otimes F)$ . Ceci montre que sur le quotient  $A(E \otimes_{a,b} F) / B(E \otimes_{a,b} F)$  l'endomorphisme nilpotent  $a$  est injectif. Donc  $A(E \otimes_{a,b} F) = B(E \otimes_{a,b} F)$ , et  $a^{M.N+N} \cdot A(E \otimes F) = 0$ .

Il nous reste seulement à prouver la condition v) de la définition 2.1.1. Mais  $E/B(E)$  et  $F/B(F)$  sont  $b$ -séparés ainsi que

$$E \otimes F / B(E \otimes F) \simeq E/B(E) \otimes F/B(F) \subset \mathcal{L}(E) \otimes \mathcal{L}(F).$$

On en déduit la condition v) pour  $E \otimes_{a,b} F$ .

Le cas de pré-(a,b)-modules à pôle simple est évident.

Pour traiter le cas de pré-(a,b)-modules réguliers, nous pouvons supposer que ce sont des (a,b)-modules, d'après la remarque qui suit la définition 2.2.1. Soit  $K$  le corps des fractions de l'anneau  $\mathbb{C}[[b]]$ . La condition de régularité pour un (a,b)-module  $G$  équivaut à la finitude dans

$$G \otimes_{\mathbb{C}[[b]]} K$$

du sous- $\mathbb{C}[[b]]$ -module  $\sum_{m \geq 0} (b^{-1} \cdot a)^m \cdot G$  (voir [B.93] p. 18).

Mais on a pour chaque  $m \in \mathbb{N}$

$$(b^{-1} \cdot a)^m (E \otimes F) \subset \sum_{j \in [0, m]} ((b^{-1} \cdot a)^j E \otimes (b^{-1} \cdot a)^{m-j} F).$$

On en déduit la régularité de  $E \otimes_{a,b} F$ . ■

### 2.3 Cas des pré-(a,b)-modules associés à des singularités de fonctions holomorphes.

Nous allons montrer que la cohomologie du complexe de De Rham  $((\text{Ker } df)^\bullet, d)$  restreint à  $f^{-1}(0)$ , associée à une fonction holomorphe non constante, vérifie toujours les propriétés i) à v) de la définition d'un pré-(a,b)-module.

**Proposition 2.3.1** Soit  $f : (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  un germe non nul de fonction holomorphe. Considérons pour  $p \in [1, n + 1]$  le  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel

$$\mathcal{H}_0^p := ((Ker df)^p \cap Ker d) / d((Ker df)^{p-1})_0$$

muni des  $\mathbb{C}$ -endomorphismes  $a$  et  $b$  définis respectivement par la multiplication par  $f$  et  $df \wedge d^{-1}$ .

Alors  $\mathcal{H}_0^p$  vérifie les conditions i) à v) de la définition 2.1.1.

Preuve. Soit  $du \in (Ker df)^p$  ; on a  $a[du] = [f \cdot du]$  et  $b[du] = [df \wedge u]$ . Donc

$$b(a + b)[du] = b([d(f \cdot u)]) = [df \wedge f \cdot u] = a([df \wedge u]) = a(b([du])) ,$$

ce qui prouve notre première assertion.

Comme on a

$$d(\lambda \cdot e^{-\frac{1}{\lambda} \cdot f} \cdot u) = -e^{-\frac{1}{\lambda} \cdot f} (df \wedge u - \lambda du)$$

l'annulation de  $b[du] - \lambda \cdot [du]$  qui se traduit par l'existence de  $v \in (Ker df)^{p-1}$  vérifiant

$$e^{\frac{1}{\lambda} \cdot f} \cdot d(\lambda \cdot e^{-\frac{1}{\lambda} \cdot f} \cdot u) = dv$$

ce qui donne

$$d(e^{-\frac{1}{\lambda} \cdot f} \cdot (\lambda \cdot u - v)) = 0.$$

Le lemme de De Rham holomorphe assure alors l'existence de  $\xi \in \Omega_0^{p-2}$  tel que l'on ait

$$d\xi = e^{-\frac{1}{\lambda} \cdot f} \cdot (\lambda \cdot u - v) .$$

On en déduit que

$$d(e^{\frac{1}{\lambda} \cdot f} \cdot \xi) = \lambda \cdot u - v + \frac{1}{\lambda} e^{\frac{1}{\lambda} \cdot f} \cdot df \wedge \xi$$

ce qui donne la nullité de  $\lambda \cdot [du]$  et donc de  $[du]$  puisque  $\lambda \neq 0$ .

Pour voir la surjectivité de  $b - \lambda$  il suffit de résoudre l'équation

$$df \wedge \xi - \lambda \cdot d\xi = du$$

où  $du \in (Ker df)^p$  est donné. Comme la  $p$ -forme holomorphe  $-\frac{1}{\lambda} \cdot e^{-\frac{1}{\lambda} \cdot f} \cdot du$  est  $d$ -fermée, le lemme de De Rham holomorphe assure alors l'existence de  $\eta \in \Omega_0^{p-1}$  vérifiant

$$d\eta = -\frac{1}{\lambda} \cdot e^{-\frac{1}{\lambda} \cdot f} \cdot du .$$

On vérifie alors immédiatement que  $\xi := e^{\frac{1}{\lambda} \cdot f} \cdot \eta$  est solution de notre équation<sup>1</sup>.

La condition iii) est conséquence du résultat classique d'A. Grothendieck [G.66]<sup>2</sup>.

La condition iv) est conséquence du fait que la  $b$ -torsion de  $\mathcal{H}_0^p$  est contenue

<sup>1</sup>Pour  $p = 1$  on choisit  $u(0) = 0$ . Comme  $(Ker df)^0 = 0$ , on aura ensuite  $v = 0$  et  $u = C \cdot \lambda^{-1} \cdot e^{\frac{1}{\lambda} \cdot f}$ . Alors  $u(0) = 0$  donne  $C = 0$  et donc  $u \equiv 0$ .

<sup>2</sup>On peut obtenir directement ce point via le cas à croisements normaux en utilisant le théorème de désingularisation d'Hironaka [H.64].

dans la  $a$ -torsion. Ceci résulte du fait que, quitte à localiser en  $a$  (c'est à dire à considérer des formes méromorphes à pôles dans  $f = 0$ ) on a  $\text{Ker } df^\bullet = \text{Im } df^\bullet$ .

Alors  $df \wedge \xi = d\eta$  avec  $df \wedge \eta = 0$  donnera  $\eta = df \wedge \zeta$  ;  
 donc  $df \wedge (\xi + d\zeta) = 0$  et donc  $\xi + d\zeta = df \wedge \gamma$ . Alors  $d\xi = -df \wedge d\gamma$ .

La condition v) est une conséquence immédiate du théorème de positivité de B. Malgrange [M.74]. ■

**Lemme 2.3.2** *Plaçons-nous dans la situation de la proposition 2.3.1 et supposons la fonction  $f$  réduite. Pour tout  $p \in \mathbb{N}$ ,  $p \geq 2$ ,  $E := \mathcal{H}_0^p$  vérifie  $\tilde{A}(E) = A(E)$ .*

*Preuve.* Il s'agit simplement de voir que  $\tilde{A}(E)$  est stable par  $b$ . Ceci résulte immédiatement du théorème de positivité de B. Malgrange<sup>3</sup> qui affirme que pour une forme holomorphe  $\omega \in (\text{Ker } df)^p$  et pour  $\gamma_s \subset f^{-1}(s)$  une famille horizontale multiforme de  $(p - 1)$ -cycles compacts, la fonction holomorphe multiforme

$$s \rightarrow \int_{\gamma_s} \frac{\omega}{df}$$

tend vers 0 quand  $s$  tend vers 0 le long de tout rayon issu de l'origine (ici on utilise  $p - 1 \geq 1$ ).

Alors  $\omega$  induit une classe de  $a$ -torsion dans  $E$  si et seulement si pour tout choix de la famille  $\gamma_s$  on trouve une intégrale nulle. Comme l'opération  $b$  correspond à prendre une primitive (qui doit donc être "nulle en 0"), l'assertion  $\tilde{A}(E) = A(E)$  s'en déduit. ■

**Corollaire 2.3.3** *Si  $f$  est à singularité isolée à l'origine,  $\mathcal{H}^{n+1}$  est un pré- $(a,b)$ -module sans torsion, dans lequel  $a$  est injective.*

Ceci donne une nouvelle preuve du résultat de Sebastiani [S.70].

*Preuve.* Vérifions déjà la condition vi) de la définition 2.1.1. La dimension finie de  $\text{Coker } b$  est immédiate vue que ce noyau s'identifie au quotient  $\Omega_0^{n+1}/df \wedge \Omega_0^n$ . Montrons que  $\text{Ker } b = 0$ . Soit  $\omega = d\xi$  où  $\xi \in \Omega_0^n$  vérifiant  $df \wedge \xi = df \wedge d\eta$  (rappelons que l'on a  $\text{Ker } df^n = df \wedge \Omega^{n-1}$  puisque  $f$  est à singularité isolée). Alors  $\xi = d\eta + df \wedge \zeta$  et on a donc  $[\omega] = 0$  dans  $\mathcal{H}^{n+1}$ . Il suffit alors d'appliquer le lemme précédent pour conclure, puisque l'on a vu que  $0 = B(E) = A(E)$ . ■

---

<sup>3</sup>L'assertion "  $f$  réduite " correspond à la preuve précisée dans l'Appendice de [B.84] (note au bas de la page 106).

### 3 Le théorème de finitude.

#### 3.1 L'hypothèse (HI).

Soit  $\tilde{f} : (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}, 0)$  un germe non constant de fonction holomorphe et soit  $f : X \longrightarrow D$  un représentant de Milnor de  $\tilde{f}$ . Nous ferons les hypothèses suivantes:

HI a) Le lieu singulier  $S := \{x \in X / df_x = 0\}$  est une courbe contenue dans  $Y := f^{-1}(0)$ , dont chaque composante irréductible contient l'origine et est non singulière en dehors de 0.

HI b) En chaque point  $x$  de  $S - \{0\}$  il existe un germe en  $x$  de champ de vecteur holomorphe  $V_x$ , non nul en  $x$ , tel que  $V_x \cdot f \equiv 0$ .

L'hypothèse HI b) est assez restrictive puisqu'elle implique que le long de  $S - \{0\}$  la singularité  $\{f = 0\}$  est une déformation localement triviale de la singularité hyperplane transverse (qui est une singularité isolée de  $\mathbb{C}^n$ ).

Cependant il est facile de voir que cette hypothèse est toujours vérifiée pour  $n = 1$  (courbes planes réduites ou non) et qu'il y a beaucoup d'exemples en dimensions supérieures (voir le paragraphe 4.2.)

Le résultat fondamental de ce paragraphe est le

**Théorème 3.1.1** *Sous l'hypothèse (HI), l'espace vectoriel*

$$\mathcal{H}^{n+1} := \Omega_0^{n+1} / d(\text{Ker } df)_0^n$$

*muni des endomorphismes  $a$  et  $b$  donnés respectivement par multiplication par  $f$  et par  $df \wedge d^{-1}$  est un pré-( $a, b$ )-module régulier.*

Compte tenu des résultats du paragraphe 2 il s'agit maintenant de prouver les conditions de finitudes vi) de la définition 2.1.1. Ceci utilisera, entre autres, le théorème de constructibilité de M. Kashiwara [K.75].

#### 3.2 L'idéal $\widehat{J}(f)$ .

Dans la situation précisée ci-dessus, introduisons l'idéal  $\widehat{J}(f)$  de  $\mathcal{O}_X$  formé des germes de fonctions holomorphes dont la restriction à  $X - \{0\}$  est dans  $J(f)$  l'idéal jacobien de  $f$ . Si  $i : X - \{0\} \hookrightarrow X$  est l'inclusion, on a, dès que  $n \geq 1$ , d'après Hartogs

$$\widehat{J}(f) \simeq i_* i^*(J(f)).$$

**Définition 3.2.1** *Le faisceau  $\widehat{J}(f)/J(f)$  est cohérent et concentré en 0. En effet, le choix d'un élément de volume sur  $X$  donne un isomorphisme de faisceaux*

$$\widehat{J}(f)/J(f) \xrightarrow{\sim} \underline{H}_{\{0\}}^0(\Omega_X^{n+1}/df \wedge \Omega_X^n).$$

*La dimension finie de son germe en 0 sera notée  $\mu(f)$ .*

**Remarque.**

Pour  $f$  a singularité isolée en  $0$ , on a  $\widehat{J(f)} = \mathcal{O}_X$  et donc  $\mu = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}/J(f)$  ce qui est bien conforme à la définition du nombre de Milnor dans ce cas.

**3.3 Le  $\mathcal{D}$ -module  $\mathcal{M} = \mathcal{D}/\mathcal{J}$ .**

Soit  $\text{Ann}(f)$  le sous-faisceau du faisceau  $T_X$  des champs de vecteurs holomorphes sur  $X$ , formé des germes de champs de vecteurs qui annulent  $f$ . Ce sous-faisceau est cohérent car un choix de coordonnées sur  $X$  montre qu'il est isomorphe via

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \longrightarrow \sum_{i=0}^n a_i \widehat{dx}^i$$

au noyau  $(\text{Ker } df)^n$  du morphisme  $\mathcal{O}_X$ -linéaire

$$df^n \wedge : \Omega_X^n \longrightarrow \Omega_X^{n+1} \quad \text{défini par} \quad \alpha \longrightarrow df \wedge \alpha.$$

La condition (HI) implique que, si  $V_1 \dots V_l$  sont des germes de champs de vecteurs en  $0$  qui engendrent  $\text{Ann}(f)$  au voisinage de  $0$ , le lieu des zéros communs à  $V_1 \dots V_l$  est réduit à  $0$ ; réciproquement ceci implique la condition (HI b).

**Définition 3.3.1** On définit alors  $\mathcal{J}$  comme l'idéal à gauche de  $\mathcal{D}$  engendré au voisinage de  $0$  par  $\widehat{J(f)}$  et  $\text{Ann}(f)$ .

On pose alors  $\mathcal{M} = \mathcal{D}/\mathcal{J}$ .

**Lemme 3.3.2** On considère à l'origine de  $\mathbb{C}^{n+1}$  des germes  $(g_\lambda)_{\lambda \in [1, L]}$  de fonctions holomorphes et  $(V_\mu)_{\mu \in [1, M]}$  des germes de champs de vecteurs holomorphes. Soit  $\mathcal{J}$  l'idéal à gauche de  $\mathcal{D}_{\mathbb{C}^{n+1}}$  engendré au voisinage de  $0$  par les  $g_\lambda$  et les  $V_\mu$ .

Posons  $\widetilde{V}_\mu = V_\mu + \text{div}(V_\mu)$  pour  $\mu \in [1, M]$  où

$$\text{div}(V) := \sum_{i=0}^n \frac{\partial a_i}{\partial x_i} \quad \text{si} \quad V = \sum_{i=0}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

et soit  $\mathcal{M} := \mathcal{D}_{\mathbb{C}^{n+1}}/\mathcal{J}$ .

Alors  $DR^{n+1}(\mathcal{M})$ , le  $(n+1)$ -ième faisceau de cohomologie du complexe de De Rham de  $\mathcal{M}$ , est isomorphe comme  $\mathbb{C}_X$ -module au quotient

$$\mathcal{O} / \left( \sum_{\lambda=1}^L \mathcal{O} \cdot g_\lambda + \sum_{\mu=1}^M \widetilde{V}_\mu(\mathcal{O}) \right).$$

En particulier pour  $\mathcal{M}$  holonome, le  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel

$$\mathcal{O}_0 / \left( \sum_{\lambda=1}^L \mathcal{O}_0 \cdot g_\lambda + \sum_{\mu=1}^M \widetilde{V}_\mu(\mathcal{O}_0) \right)$$

sera de dimension finie, d'après [K.75].

*Preuve.* Comme référence sur les  $\mathcal{D}$ -modules, le lecteur pourra consulter [Bj.93]. Pour  $h \in \mathcal{O}$  et  $V$  un champ vecteur holomorphe on a  $\tilde{V}(h) = \tilde{V}.h - h.V$ . Comme on a  $\tilde{V} = \sum \frac{\partial}{\partial x_i} \cdot a_i$  si  $V = \sum a_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}$ , on aura, quand  $V$  annule  $f$  :

$$\tilde{V}_\mu(h) \in \sum_{i=0}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \mathcal{D} + \mathcal{J}.$$

Mais, par définition,

$$DR^{n+1}(\mathcal{M}) := \mathcal{M} / \sum_{i=0}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \mathcal{M} \simeq \mathcal{D} / \sum_{i=0}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \mathcal{D} + \mathcal{J}.$$

On en déduit que  $\forall h \in \mathcal{O}$  et  $\forall \mu \in [1, M]$ ,  $\tilde{V}_\mu(h)$  est nul dans  $DR^{n+1}(\mathcal{M})$ .

Par ailleurs on a  $\mathcal{D} / \sum_0^n \frac{\partial}{\partial x_i} \mathcal{D} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}$  et donc  $DR^{n+1}(\mathcal{M})$  est isomorphe à  $\mathcal{O} / \mathcal{O} \cap \left( \mathcal{J} + \sum_{i=0}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \mathcal{D} \right)$ .

Mais on vient de voir que l'on a

$$\sum_{\lambda=1}^L \mathcal{O}g_\lambda + \sum_{\mu=1}^M \tilde{V}_\mu(\mathcal{O}) \subset \mathcal{O} \cap \left( \mathcal{J} + \sum_{i=0}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \mathcal{D} \right).$$

Il nous reste à montrer que  $\mathcal{O} \cap \left( \mathcal{J} + \sum \frac{\partial}{\partial x_i} \mathcal{D} \right) \subset \sum_{\lambda=1}^L \mathcal{O}g_\lambda + \sum_{\mu=1}^M \tilde{V}_\mu(\mathcal{O})$ .

Pour  $\varphi \in \mathcal{O} \cap \left( \mathcal{J} + \sum \frac{\partial}{\partial x_i} \mathcal{D} \right)$  posons

$$\varphi = \sum_{\lambda=1}^L P_\alpha g_\lambda + \sum_{\mu=1}^M Q_r V_\mu + \sum_{i=0}^n \frac{\partial}{\partial x_i} R_i$$

où  $P_\lambda, Q_\mu$  et  $R_i \in \mathcal{D}$ .

Ecrivons les  $\frac{\partial}{\partial x_i}$  "à gauche". On trouve alors, grace à l'unicité de l'écriture à gauche,

$$\varphi = \sum_{\lambda=1}^L p_\lambda \cdot g_\lambda + \left[ \sum_{\mu=1}^M q_\mu V_\mu + \sum_{i=0}^n \frac{\partial}{\partial x_i} r_i \right]_0$$

où  $p_\lambda, q_\mu$  et  $r_i$  sont dans  $\mathcal{O}$  et où le symbole  $[\pi]_0$  désigne le terme de degré 0 de l'opérateur différentiel  $\pi$  (avec les  $\frac{\partial}{\partial x_i}$  à gauche).

Mais on a  $q_\mu V_\mu = \tilde{V}_\mu q_\mu - \tilde{V}_\mu(q_\mu)$  avec  $\tilde{V}_\mu \in \sum_{i=0}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \mathcal{D}$ . On en conclut que

$$\varphi = \sum_{\lambda=1}^L p_\lambda \cdot g_\lambda - \sum_{\mu=1}^M \tilde{V}_\mu(q_\mu). \quad \blacksquare$$

**Lemme 3.3.3** *On se place dans la situation du lemme précédent. On suppose*

- i) *que l'ensemble  $\left\{x \in \mathbb{C}^{n+1} / g_\lambda(x) = 0 \quad \forall \lambda \in [1, L]\right\}$  est un germe de courbe en 0. Notons le  $S$ .*
- ii) *que pour tout point  $y \in S \setminus \{0\}$  il existe  $m_y \in [1, M]$  tel que  $V_{m_y}$  ne s'annule pas en  $y$ .*

Alors  $\mathcal{M} := \mathcal{D}/\mathcal{J}$  est holonome.

*Preuve.* Il est clair que  $\text{Supp } \mathcal{M} \subset S$ . Au point générique  $y$  de  $S$ , la variété caractéristique  $\text{ch}(\mathcal{M})$  de  $\mathcal{M}$  est contenue dans un fibré en hyperplan sur  $S$  (défini par l'annulation du symbole principal de  $V_{m_y}$ ). On a donc  $\dim \text{ch}(\mathcal{M}) \leq n + 1$  au dessus de  $S \setminus \{0\}$  donc partout. ■

### 3.4 Finitude de $\text{Ker } b$ .

Définissons maintenant les faisceaux  $\mathcal{E}' = \Omega_X^{n+1}/d(\text{Ker } df)^n \simeq \mathcal{H}^{n+1}$ ,  $\mathcal{E}'' := \Omega_X^{n+1}/df \wedge d\Omega_X^{n-1}$  et les espaces vectoriels

$$E' := H_{\{0\}}^0(\mathcal{H}^{n+1}) \quad , \quad E'' := H_{\{0\}}^0(\mathcal{E}'').$$

Soit  $\tilde{j} : \mathcal{E}'' \longrightarrow \mathcal{H}^{n+1}$  le quotient évident et notons  $j : E'' \longrightarrow E'$  l'application qui s'en déduit.

**Lemme 3.4.1** *La flèche  $\tilde{b} : \mathcal{H}^{n+1} \rightarrow \mathcal{E}''$  donnée par  $\tilde{b}[d\xi] = [df \wedge \xi]$  est bien définie; c'est une injection  $\mathbb{C}$ -linéaire de conoyau  $\Omega^{n+1}/df \wedge \Omega^n \simeq \mathcal{O}/J(f)$ .*

*Preuve.* Commençons par montrer que cette flèche est bien définie. Considérons donc un  $\xi \in \Omega^n$  tel que  $d\xi = 0$ . Alors le lemme de De Rham holomorphe permet d'écrire  $\xi = d\eta$  avec  $\eta \in \Omega^{n-1}$ . On aura donc  $[df \wedge \xi] = [df \wedge d\eta] = 0$  dans  $\mathcal{E}''$ . Montrons l'injectivité. Si on a  $[df \wedge \xi] = 0$ , cela signifie qu'il existe  $\zeta \in \Omega^{n-1}$  vérifiant  $df \wedge \xi = df \wedge d\zeta$ . On aura donc  $\xi - d\zeta \in \text{Ker } df^n$  d'où  $[d\xi] = [d(\xi - d\zeta)] = 0$  dans  $\mathcal{H}^{n+1}$ .

L'assertion sur le conoyau de  $\tilde{b}$  est évidente. ■

**Lemme 3.4.2** *Sous l'hypothèse (HI) on a au voisinage de tout point  $p$  de  $X \setminus \{0\}$  :*

- 1)  $d(\text{Ker } df)^n = \Omega_X^{n+1}$
- 2)  $\Omega_X^n = d\Omega_X^{n-1} + \text{Ker } df^n$  et donc
- 3)  $df \wedge d\Omega_X^{n-1} = df \wedge \Omega_X^n$ .

*Preuve.* Il suffit évidemment de traiter le cas où  $p \in S \setminus \{0\}$ . Soit  $V = \sum_{i=0}^n a_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}$  un champ de vecteur holomorphe au voisinage de  $p$  vérifiant  $V.f \equiv 0$  et  $V(p) \neq 0$ .

Posons  $\alpha = \sum_{i=0}^n a_i dx^i$  où  $dx^i = (-1)^i \cdot dx_0 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_n$ .

Alors  $\alpha \in \Omega_X^n$ ,  $\alpha(p) \neq 0$  et  $df \wedge \alpha \equiv 0$ .

Pour prouver 1) on veut montrer que  $\forall g \in \mathcal{O}_p$  il existe  $h \in \mathcal{O}_p$  vérifiant  $d(h\alpha) = g dx_0 \wedge \dots \wedge dx_n$  c'est-à-dire que

$$\sum_{j=0}^n \alpha_j \cdot \frac{\partial h}{\partial x_j} + \left( \sum_{j=0}^n \frac{\partial \alpha_j}{\partial x_j} \right) \cdot h = g.$$

Mais puisque  $V(p) \neq 0$  on peut, dans un système de coordonnées locales convenablement centrées en  $p$ , se ramener à résoudre,  $\forall g \in \mathcal{O}_0$ , une équation du type  $\frac{\partial}{\partial x_0} h + \xi \cdot h = g$  où  $h \in \mathcal{O}_0$  est inconnue et où  $\xi \in \mathcal{O}_0$  est donnée.

Ceci est élémentaire.

Montrons 2). Soit  $w \in \Omega_p^n$ . Alors d'après 1) on peut trouver  $h \in \mathcal{O}_0$  telle que  $dw = d(h\alpha)$ . D'après De Rham on aura donc  $u \in \Omega_0^n$  telle que  $w - h\alpha = du$ . On en déduit alors 2) puis 3). ■

Les faisceaux  $\mathcal{H}^{n+1}$  et  $\tilde{b}.\mathcal{H}^{n+1}$  sont donc à support l'origine. On pourra donc confondre le faisceau  $\mathcal{H}^{n+1}$  et l'espace vectoriel de ses sections à support l'origine  $E'$ . On prendra garde que le faisceau  $\mathcal{E}''$  n'est pas en général à support l'origine sous l'hypothèse (HI).

On a une suite exacte courte grâce au lemme 3.4.1

$$0 \rightarrow \mathcal{H}^{n+1} \xrightarrow{\tilde{b}} \mathcal{E}'' \rightarrow \Omega^{n+1}/df \wedge \Omega^n \rightarrow 0$$

qui donne une suite exacte courte de cohomologie à support l'origine, grâce au lemme 3.4.2:

$$0 \rightarrow E' \xrightarrow{\tilde{b}} E'' \rightarrow H_{\{0\}}^0(\Omega^{n+1}/df \wedge \Omega^n) \rightarrow 0.$$

Mais l'endomorphisme  $b : E' \rightarrow E'$  est la composée de  $\tilde{b}$  et de  $j$ . La première assertion de finitude du théorème 3.1.1 est donnée par la proposition suivante, compte tenu du lemme 3.4.1 et de ce qui précède.

**Proposition 3.4.3** *Sous l'hypothèse (HI) le noyau  $H_{\{0\}}^0(X, \frac{d(\text{Ker } df)^n}{df \wedge d\Omega^{n-1}})$  de l'application  $j : E'' \rightarrow E'$  est de dimension finie.*

*La dimension de  $\text{Ker } j$  et donc à fortiori celle de  $\text{Ker } b$  est majorée par la dimension de  $H_{\{0\}}^1(S, \mathcal{H}^n/b\mathcal{H}^n)$ <sup>4</sup>.*

*Preuve.* Commençons par montrer que l'on a une suite exacte de faisceaux à supports dans  $S$ .

$$0 \rightarrow \frac{(\text{Ker } df)^n \cap \text{Ker } d}{(\text{Im } df)^n \cap \text{Ker } d} \rightarrow \frac{(\text{Ker } df)^n}{(\text{Im } df)^n} \xrightarrow{d} \frac{d(\text{Ker } df)^n}{df \wedge d\Omega_X^{n-1}} \rightarrow 0.$$

<sup>4</sup>Les faisceaux  $\mathcal{H}^p$  ont été introduits à la proposition 2.3.1

L'exactitude résulte simplement du fait que si  $w \in (\text{Ker } df)^n$  vérifie  $dw = df \wedge d\mu$ , alors  $d(w + df \wedge \mu) = 0$  et donc  $[w] = [w + df \wedge \mu]$  dans  $\frac{(\text{Ker } df)^n}{(\text{Im } df)^n}$  est bien l'image de  $w + df \wedge \mu \in (\text{Ker } df)^n \cap \text{Ker } d$ .

Nous aurons besoin du lemme suivant et de son corollaire.

**Lemme 3.4.4** *Sous l'hypothèse (HI) on a pour tout  $p \in [1, n]$*

$$\mathcal{A}(p) = \begin{cases} (\text{Ker } df)^{p-1} = (\text{Im } df)^{p-1} \\ \underline{H}_S^i((\text{Im } df)^{p-1}) = 0 \quad \text{pour } i \leq n - (p - 1). \end{cases}$$

*Preuve.* Pour  $p = 1$ ,  $\mathcal{A}(1)$  est vraie car  $(\text{Ker } df)^0 = (\text{Im } df)^0 = 0$ .

Supposons  $\mathcal{A}(p)$  vraie avec  $p \in [1, n - 1]$  et montrons-la pour  $p + 1$  : la suite exacte de faisceaux sur  $X$  :

$$0 \longrightarrow (\text{Ker } df)^{p-1} \longrightarrow \Omega_X^{p-1} \xrightarrow{\wedge df} (\text{Im } df)^p \longrightarrow 0 \quad (*)$$

donne pour  $i + 1 \leq n$ , puisque  $\underline{H}_S^k(\Omega_X) = 0$  pour  $k < n$  ( $= \text{codim}_X S$ ) :

$$\underline{H}_S^i((\text{Im } df)^p) \subset \underline{H}_S^{i+1}((\text{Im } df)^{p-1})$$

en utilisant  $\mathcal{A}(p)$  qui donne  $(\text{Ker } df)^{p-1} = (\text{Im } df)^{p-1}$ . Pour  $i \leq n - p$  on a  $i + 1 \leq n - (p - 1) \leq n$  et donc  $\underline{H}_S^{i+1}((\text{Im } df)^{p-1}) = 0$  grâce à  $\mathcal{A}(p)$ .

Montrons maintenant que  $(\text{Ker } df)^p = (\text{Im } df)^p$ . Comme on a déjà obtenu que  $\underline{H}_S^1((\text{Im } df)^p) = 0$ , car  $p \leq n - 1$ , on aura

$$(\text{Im } df)^p = j_* j^* (\text{Im } df)^p$$

où  $j : X - S \hookrightarrow X$  est l'inclusion. Mais on a  $j^*((\text{Ker } df)^p) = j^*((\text{Im } df)^p)$  puisque  $df \neq 0$  sur  $X - S$ . De plus pour  $n \geq 2$ ,  $S$  est de codimension  $\geq 2$  dans  $X$  et on a  $j_* j^* (\text{Ker } df)^p = (\text{Ker } df)^p$  par Hartogs<sup>5</sup>.

On en déduit que  $\mathcal{A}(p + 1)$  est vraie. ■

**Corollaire 3.4.5** *Sous l'hypothèse (HI) on a  $H_{\{0\}}^0(S, \frac{\text{Ker } df^n}{\text{Im } df^n}) = 0$ .*

*Preuve.* Considérons à nouveau la suite exacte (\*); comme on a

$$H_{\{0\}}^i(X, \Omega_X^{p-1}) = 0 \quad \forall p \geq 1 \quad \forall i \leq n$$

on aura pour tout  $p \leq n - 1$  et tout  $i$  tel que  $i + p \leq n + 1$  :

$$H_{\{0\}}^i(X, \text{Im } df^p) = 0. \quad (@)$$

---

<sup>5</sup>Pour  $n = 1$  l'assertion  $\mathcal{A}(1)$  est vraie car vide.

En effet c'est clair pour  $p = 0$  ; si c'est vrai pour  $p \leq n - 1$  , alors la suite exacte (\*) et  $\mathcal{A}(p + 1)$  donne l'inclusion :

$$H_{\{0\}}^i(X, (\text{Im } df)^{p+1}) \subset H_{\{0\}}^{i+1}(X, (\text{Im } df)^p)$$

pour  $i + 1 + p \leq n + 1$  .

On en conclut, en prenant dans (@)  $p = n - 1$  et  $i = 2$  que, grace à  $\mathcal{A}(n)$ ,  $H_{\{0\}}^2(X, (\text{Ker } df)^{n-1}) = 0$ . La suite exacte pour (\*) avec  $p = n$  donne alors

$$H_{\{0\}}^1(X, (\text{Im } df)^n) = 0.$$

La suite exacte

$$0 \longrightarrow \text{Im } df^n \longrightarrow (\text{Ker } df)^n \longrightarrow \frac{(\text{Ker } df)^n}{(\text{Im } df)^n} \longrightarrow 0$$

donne enfin, puisque  $H_{\{0\}}^0(X, (\text{Ker } df)^n) = 0$  ,  $H_{\{0\}}^0(X, \frac{(\text{Ker } df)^n}{(\text{Im } df)^n}) = 0$  . ■

*Fin de la preuve de la proposition 3.4.3.* Remarquons maintenant que l'hypothèse (HI) implique que le faisceau  $\mathcal{H}^n$  est localement constant sur  $S^*$ . en effet près de  $y \in S^*$  l'existence d'un champ de vecteur holomorphe non nul en  $y$  et annulant  $f$  permet de choisir un système de coordonnées où  $f$  ne dépend pas de la variable  $x_0$ . . Notons  $\pi : \mathbb{C}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{C}^n$  la projection dans un tel système de coordonnées. Comme  $f$  est à singularité isolée dans  $\mathbb{C}^n$ , on en déduit que

$$(\text{Ker } df)^n \cap \text{Ker } d \simeq \pi^{-1}(\Omega_{\mathbb{C}^n}^n) \quad \text{modulo} \quad df \wedge d\Omega^{n-2} \simeq d(\text{Ker } df)^{n-1}$$

d'où notre assertion. Alors le faisceau

$$\mathcal{H}^n / b\mathcal{H}^n := \frac{(\text{Ker } df)^n \cap \text{Ker } d}{(\text{Im } df)^n \cap \text{Ker } d}$$

est un système local sur  $S^*$ , de rang  $\mu_{tr}$  près de  $y$ , où  $\mu_{tr} = \dim_{\mathbb{C}}(\Omega_{\mathbb{C}^n}^n / df \wedge \Omega_{\mathbb{C}^n}^{n-1})$  est le rang sur  $\mathbb{C}[[b]]$  du faisceau localement constant sur  $S^*$  de (a,b)-modules associé au faisceau localement constant de pré-(a,b)-modules (sans torsion)  $\mathcal{H}^n$ .

Comme  $S$  est une réunion finie de disques topologiques ayant même centre (et sinon disjoints) on en déduit que  $H_{\{0\}}^1(S, \mathcal{H}^n / b\mathcal{H}^n)$  est de dimension finie sur  $\mathbb{C}$ . La suite exacte de cohomologie à support l'origine de la suite exacte

$$0 \longrightarrow \frac{(\text{Ker } df)^n \cap \text{Ker } d}{(\text{Im } df)^n \cap \text{Ker } d} \longrightarrow \frac{(\text{Ker } df)^n}{(\text{Im } df)^n} \xrightarrow{d} \frac{d(\text{Ker } df)^n}{df \wedge d\Omega_X^{n-1}} \longrightarrow 0 .$$

donne alors le "tronçon" exact :

$$0 \simeq H_{\{0\}}^0(S, \frac{(\text{Ker } df)^n}{(\text{Im } df)^n}) \rightarrow H_{\{0\}}^0(S, \frac{d(\text{Ker } df)^n}{df \wedge d\Omega_X^{n-1}}) \rightarrow H_{\{0\}}^1(S, \mathcal{H}^n / b\mathcal{H}^n)$$

qui permet de conclure à la finitude de l'espace vectoriel  $H_{\{0\}}^0(S, \frac{d(\text{Ker } df)^n}{df \wedge d\Omega_X^{n-1}})$  et donc à la finitude de  $\text{Ker } j$ . ■

*Fin de la démonstration du théorème 3.1.1.* Il nous reste à montrer que le conoyau de  $b : E' \rightarrow E'$  est de dimension finie. Ceci va résulter de la finitude du quotient  $E''/\tilde{b}E'$  qui a déjà été obtenue, et de la finitude donnée par les lemmes 3.3.2, 3.3.3 et le lemme 3.4.6 ci-dessous. La suite exacte suivante permet alors de conclure

$$E''/\tilde{b}E' \xrightarrow{j} E'/bE' \longrightarrow E'/jE'' + bE' \rightarrow 0 .$$

puisque que l'on a déjà obtenu la finitude de  $\text{Ker } j$ .

**Lemme 3.4.6** *Sous l'hypothèse (HI) on a un isomorphisme d'espace vectoriel*

$$DR^{n+1}(\mathcal{M}) \xrightarrow{\sim} E'/jE'' + bE' \simeq E'/jE'' .$$

*Preuve.* Rappelons que le  $\mathcal{D}$ -module  $\mathcal{M}$  est défini comme le quotient  $\mathcal{D}/\mathcal{J}$  où  $\mathcal{J}$  est l'idéal à gauche de  $\mathcal{D}$  engendré par  $\widehat{J(f)}$  et  $\text{Ann}f \subset T_X$ . D'après les lemmes 3.3.2 et 3.3.3, il est holonome et on a l'isomorphisme

$$DR^{n+1}(\mathcal{M}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O} / \sum_{j=1}^M \mathcal{O}g_j + \sum_{j=1}^l \tilde{V}_j(\mathcal{O})$$

où  $g_1 \dots g_M$  engendrent  $\widehat{J(f)}$  sur  $\mathcal{O}$ , où  $V_1 \dots V_l$  engendrent  $\text{Ann}(f)$  sur  $\mathcal{O}_X$  et où on associe au champ de vecteur  $V$  l'opérateur différentiel  $\tilde{V}$  d'ordre 1 défini par

$$\tilde{V}(h) = V.h + \text{div}(V).h$$

Montrons que ceci est bien linéairement isomorphe à  $E'/j(E'') + bE' \simeq E'/jE''$  comme  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel.

D'abord  $w \in \Omega_{X,0}^{n+1}$  donne une classe dans  $E'' = H_{\{0\}}^0(\Omega^{n+1}/df \wedge d\Omega_X^{n-1})$  si et seulement si localement dans  $X - \{0\}$ ,  $w$  est dans  $df \wedge d\Omega_X^n$ . D'après l'égalité  $df \wedge d\Omega_X^{n-1} = df \wedge \Omega_X^n$  sur  $X^*$  prouvée au lemme 3.4.2,  $w$  induira une classe de  $E''$  si et seulement si  $w \in \widehat{J(f)}. \Omega_X^{n+1}$ .

Si  $v_1 \dots v_l \in (\text{Ker } df)^n$  correspondent à  $V_1 \dots V_l$ , on aura

$$\sum_{j=1}^l d(\mathcal{O}v_j) = \left( \sum_{j=1}^l \tilde{V}_j(\mathcal{O}) \right).dx .$$

On en déduit, puisque la relation  $j \circ \tilde{b} = b$  montre que  $bE' \subset jE''$ , les isomorphismes

$$E'/jE'' + bE' \simeq \Omega_X^{n+1} / \widehat{J(f)}. \Omega_X^{n+1} + \left( \sum_{j=1}^l \tilde{V}_j(\mathcal{O}) \right).dx \simeq \mathcal{O} / \widehat{J(f)} + \sum_{j=1}^l \tilde{V}_j(\mathcal{O}) .$$

Ceci prouve notre assertion. ■

### 3.5 Généralisation de la formule de J. Milnor.

Une conséquence simple de ce qui précède est la généralisation suivante de la formule de J. Milnor, donnant, sous nos hypothèses, la dimension du  $n$ -ième groupe de cohomologie de la fibre de Milnor de  $f$  à l'origine.

**Corollaire 3.5.1** *Sous l'hypothèse (HI) l'espace vectoriel  $E' := \mathcal{H}_0^{n+1} \simeq H_{\{0\}}^0(Y, \mathcal{H}^{n+1})$  est un pré-(a,b)-module de rang  $r$  vérifiant*

$$\dim E'/b.E' = \mu(f) + \nu(f) - \gamma + \delta \quad \text{et} \quad \dim H^n(F_0, \mathbb{C}) = r = \mu(f) + \nu(f) - \gamma.$$

où  $F_0$  désigne la fibre de Milnor de  $f$  à l'origine et où  $\gamma$  et  $\delta$  sont les dimensions respectives de  $\text{Ker } j$  et de  $\text{Ker } b$ .

*Démonstration.* Rappelons que le rang d'un pré-(a,b)-module est, par définition, le rang du (a,b)-module associé. C'est donc le rang du fibré de Gauss-Manin de  $f$  à l'origine et ce rang est égal à la dimension de  $H^n(F_0, \mathbb{C})$ . La suite exacte

$$0 \rightarrow \text{Ker } j \rightarrow E'' \xrightarrow{j} E' \rightarrow E'/jE'' \rightarrow 0$$

donne la suite exacte d'espaces vectoriels de dimensions finies, grâce au théorème de finitude 3.1.1

$$0 \rightarrow \text{Ker } j / (\text{Ker } j \cap \tilde{b}.E') \rightarrow E''/\tilde{b}.E' \rightarrow E'/b.E' \rightarrow E'/jE'' \rightarrow 0.$$

On a  $\text{Ker } b \simeq \text{Ker } j \cap \tilde{b}.E'$  via  $\tilde{b}$  puisque  $\tilde{b}$  est injective et que  $b = j \circ \tilde{b}$  dans  $E'$ . On obtient alors, puisque  $\dim E''/\tilde{b}.E' = \mu(f)$ ,  $\dim E'/jE'' = \nu(f)$ , la relation :

$$\dim(E'/b.E') + \gamma - \delta = \mu(f) + \nu(f).$$

La suite exacte  $0 \rightarrow B(E') \rightarrow E' \rightarrow E'/B(E') \rightarrow 0$  donne alors la relation

$$\dim E'/b.E' = \dim(E'/B(E') + b.E') + \dim(B(E')/b.B(E')).$$

Comme on a  $r = \dim(E'/B(E') + b.E')$  et  $\dim B(E')/b.B(E') = \dim \text{Ker } b$ , on conclut facilement. ■

#### Remarque importante.

Les entiers  $\gamma$  et  $\delta$  sont bien génants, aussi est-il intéressant de disposer de situations où l'on sait qu'ils sont nuls.

Pour avoir l'injectivité de l'application  $E'' \xrightarrow{j} E'$ , c'est à dire la nullité de  $\gamma$ , une condition nécessaire et suffisante est donnée par l'inclusion

$$d(\text{Ker } df^n) \cap \widehat{J}(f).\Omega^{n+1} \subset df \wedge d\Omega_X^{n-1}, \quad (\text{P})$$

alors qu'une condition nécessaire et suffisante pour l'injectivité de  $E' \xrightarrow{b} E'$ , c'est à dire pour la nullité de  $\delta$ , est donnée par l'inclusion

$$d(\text{Ker } df^n) \cap (df \wedge \Omega_X^n) \subset df \wedge d\Omega_X^{n-1}. \quad (\text{P}')$$

Bien sur on a toujours  $\delta \leq \gamma$  et la condition (P) implique la condition (P').

**Corollaire 3.5.2** *Sous les hypothèses (HI) et la condition (P) on aura*

$$rg(E') = \dim E'/bE' = \mu(f) + \nu(f),$$

où  $\mu(f) = \dim \widehat{J(f)}/J(f)$  et où  $\nu(f) = \dim DR^{n+1}(\mathcal{M})$ .

Dans ces conditions la cohomologie de degré  $n$  de la fibre de Milnor de  $f$  à l'origine est de dimension  $\mu(f) + \nu(f)$ .

Nous montrerons au paragraphe 4 que cette condition est souvent vérifiée.

En fait je ne connais pas d'exemple de cas où  $f$  vérifie l'hypothèse (HI) et où la condition (P) n'est pas réalisée.

### 3.6 Exemple.

Voici un exemple simple (avec  $n = 1$ )<sup>6</sup> :

$$f(X, Y) = X^3(X^3 + Y^3).$$

Il est facile de voir que  $\text{Ker } df^1/\mathcal{O}.df$  est engendré par la 1-forme associé au champ de vecteur

$$V = XY^2 \frac{\partial}{\partial X} - (2X^3 + Y^3) \frac{\partial}{\partial Y}$$

annulant  $f$  et de divergence  $\text{div } V = -2Y^2$ .

On a  $J(f) = X^2.(2X^3 + Y^3, XY^2)$ ,  $\widehat{J(f)} = (X^2)$  et  $\dim_{\mathbb{C}} \widehat{J(f)}/J(f) = \mu(f) = 9$ .

Pour calculer  $\dim_{\mathbb{C}} (\mathbb{C}\{X, Y\}/(X^2) + \widetilde{V}(\mathbb{C}\{X, Y\}))$  on regarde l'identité

$$\widetilde{V}(X^p Y^q) = (p - q - 2)X^p Y^{q+2} - 2qX^{p+3} Y^{q-1};$$

on peut donc réduire  $X^a Y^b$  à  $X^{a+3} Y^{b-3}$  pourvu que  $a \neq b$  et  $b \geq 2$ .

Si  $a = b \geq 2$  on est dans  $(X^2)$ . Il reste donc  $1, X, Y$  et  $X^p Y$  pour  $p < 2$ .

Donc  $1, X, Y, XY$  donne une base et  $\nu(f) = 4$ .

Alors  $\mathcal{L}(E')$ , le complété  $b$ -adique de  $E'$  (voir le paragraphe 2), est un  $(a, b)$ -module de rang 13. Une base de  $E'/bE'$  est donnée par

$$1, X, Y, XY, X^2, X^3, X^4, X^5, X^2 Y, X^3 Y, X^4 Y, X^5 Y, X^2 Y^2$$

$$\text{et on a } a[1] = \frac{1}{3}b[1] \dots a[X^p Y^q] = \frac{p+q+2}{6}b[X^p Y^q].$$

---

<sup>6</sup>Notons que (HI) est toujours vérifiée pour  $n = 1$ . C'est également le cas pour la condition (P) comme on le montrera au paragraphe 4.

## 4 Quelques cas sans torsion.

### 4.1

Le calcul de  $\mu(f)$  est en général assez simple (comparable au calcul du nombre de Milnor dans le cas d'une singularité isolée). Le calcul de  $\nu(f)$  bien que l'on ait donné un isomorphisme de  $DR^{n+1}(\mathcal{M})$  sur un espace vectoriel plus "concret" au lemme 3.3.2, est en pratique beaucoup plus délicat car l'espace vectoriel considéré n'a pas une structure de module sur  $\mathcal{O}_0$ .

Sans la condition  $(P)$  pour  $f$ , on obtient seulement une majoration de la dimension du quotient  $E'/b.E'$ , ce qui rend les calculs encore bien plus pénibles. D'où l'intérêt de savoir, pour une sous-famille aussi large que possible de la famille des fonctions vérifiant l'hypothèse  $(HI)$ , que la condition  $(P)$  est satisfaite. Ceci est d'autant plus utile que la vérification de cette condition est délicate, comme on peut s'en convaincre sur les exemples. Nous proposons donc de donner dans ce paragraphe deux résultats qui permettent de voir que la condition  $(P)$  est très souvent vérifiée sous l'hypothèse  $(HI)$ .

Le premier résultat (théorème 4.2.2) montre que la propriété  $(P)$  est toujours vérifiée pour  $n = 1$ , c'est à dire pour les germes de fonctions holomorphes (réduites ou non) à l'origine de  $\mathbb{C}^2$ .

Le second (la proposition 4.3.2) assure que la suspension d'une fonction à singularité isolée avec une fonction qui vérifie  $(HI)$  et  $(P)$  vérifie également  $(HI)$  et  $(P)$ .

### 4.2 Courbes planes.

**Lemme 4.2.1 (Récurrence tordue.)** Soient  $p_1, \dots, p_k$  des entiers  $\geq 2$  et soient  $\phi_1 \dots \phi_k$  des fonctions strictement croissantes

$$\phi_j : [0, p_j - 1] \cap \mathbb{N} \longrightarrow [0, 1]$$

vérifiant

$$\phi_j(p_j - 1) = 1, \quad \forall j \in [1, k].$$

Considérons des propositions  $A(\sigma_1, \dots, \sigma_k)$  indexées par les entiers

$$\sigma_j \in [0, p_j - 1] \cap \mathbb{N}.$$

On suppose

- 1)  $A(0, \dots, 0)$  est vraie .
- 2) l'implication  $A(\sigma_1, \dots, \sigma_k) \Rightarrow A(\sigma_1, \dots, \sigma_j + 1, \dots, \sigma_k)$  est vraie si les deux conditions suivantes sont satisfaites

$$a) \sigma_j \leq p_j - 2$$

$$b) \phi_j(\sigma_j) = \min_{l \in [1, k]} \{\phi_l(\sigma_l)\}$$

Alors la proposition  $A(p_1 - 1, \dots, p_k - 1)$  est vraie.

**On prendra garde que nous n'affirmons pas ici que  $A(\sigma_1, \dots, \sigma_k)$  est vraie pour toutes les valeurs de  $(\sigma_1, \dots, \sigma_k)$ .**

La preuve (élémentaire) est laissée en exercice au lecteur.

**Théorème 4.2.2** *Soit  $f$  un germe non nul de fonction holomorphe à l'origine de  $\mathbb{C}^2$ , vérifiant  $f(0) = 0$ . Alors  $f$  vérifie (HI) et (P).*

Ce théorème est une conséquence immédiate des deux propositions suivantes.

**Proposition 4.2.3** *Soit  $f$  un germe de fonction holomorphe à l'origine de  $\mathbb{C}^2$ , vérifiant  $f(0) = 0$  et que l'on supposera non identiquement nul. Ecrivons*

$$f = u_1^{p_1} \cdots u_k^{p_k} \cdot \psi$$

où  $u_1 \cdots u_k$  sont des germes irréductibles en 0 deux à deux distincts, où  $\psi$  est un germe nul en 0 supposé réduit (donc à singularité isolée en 0) et où les entiers  $p_1, \dots, p_k$  sont des entiers au moins égaux à deux. On suppose de plus qu'aucun des  $u_j$  ne divise  $\psi$ .

Alors on a :

- 1)  $\text{Ker}df^1 = \mathcal{O} \cdot \alpha$  où

$$\alpha := \sum_{l=1}^k p_l \cdot u_1 \cdots \hat{u}_l \cdots u_k \cdot \psi \cdot du_l + u_1 \cdots u_k \cdot d\psi$$

- 2) Pour tout  $h \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,0}$  vérifiant  $d(h \cdot \alpha) \in (u_1^{p_1-1} \cdots u_k^{p_k-1}) \cdot \Omega_{\mathbb{C}^2,0}^2$  on a  $h \in (u_1^{p_1-1} \cdots u_k^{p_k-1}) \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,0}$ .

Nous allons maintenant traiter le cas où  $\psi(0) \neq 0$  dans la proposition précédente. On peut alors supposer que  $\psi \equiv 1$ .

**Proposition 4.2.4** *Dans la même situation que la proposition précédente, supposons maintenant que  $\psi \equiv 1$ . Alors on a :*

- 1)  $\text{Ker}df^1 = \mathcal{O} \cdot \alpha$  où  $\alpha := \sum_{l=1}^k p_l \cdot u_1 \cdots \hat{u}_l \cdots u_k \cdot du_l$ .
- 2) Pour tout  $h \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,0}$  vérifiant  $d(h \cdot \alpha) \in (u_1^{p_1-1} \cdots u_k^{p_k-1}) \cdot \Omega_{\mathbb{C}^2,0}^2$  on peut écrire  $h = h_0 + h_1 \cdot u_1^{p_1-1} \cdots u_k^{p_k-1}$  avec  $h_1 \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,0}$  et  $h_0 \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,0}$  vérifiant  $d(h_0 \cdot \alpha) \equiv 0$ .

Preuve de 4.2.3. Prouvons déjà l'assertion 1). La suite exacte de faisceaux cohérents

$$0 \rightarrow (\text{Ker}df)^1 \rightarrow \Omega_{\mathbb{C}^2}^1 \rightarrow \Omega_{\mathbb{C}^2}^2 \rightarrow \Omega_{\mathbb{C}^2}^2/df \wedge \Omega_{\mathbb{C}^2}^1 \rightarrow 0$$

montre que le faisceau  $(\text{Ker}df)^1$  est localement libre de rang 1 d'après le théorème de Hilbert pour  $\mathbb{C}^2$ . Comme on a  $df = u_1^{p_1-1} \cdots u_k^{p_k-1} \cdot \alpha$  on a  $\mathcal{O} \cdot \alpha \hookrightarrow (\text{Ker}df)^1$ . Il

s'agit de voir que cette inclusion est une égalité. Mais comme on sait que  $(Ker df)^1$  est libre de rang 1 près de l'origine, il suffit de prouver cette égalité en dehors de l'origine d'après Hartogs. Quand  $df$  ne s'annule pas c'est clair car  $df$  et  $\alpha$  diffèrent d'un facteur inversible et on a  $(Ker df)^1 = \mathcal{O}.df$  près d'un tel point.

Il nous suffit donc de montrer cette égalité près du point générique de  $u_j = 0$  pour chaque  $j \in [1, k]$ . Au voisinage d'un tel point  $df$  ne diffère de  $u_j^{p_j-1}.\alpha$  que par un facteur inversible ; on a donc  $(Ker df)^1 = Ker(\wedge\alpha)$ . Mais près d'un tel point  $\alpha$  ne s'annule pas car  $p_j u_1 \cdots \hat{u}_j \cdots u_k . \psi . du_j$  est non nulle alors que la somme

$$\sum_{i \neq j} p_i . u_1 \cdots \hat{u}_i \cdots u_k . \psi . du_i$$

est nulle en ce point (puisque'il y a  $u_j$  en facteur).

On aura donc  $Ker(\wedge\alpha) = \mathcal{O}.\alpha$  près d'un tel point, ce qui achève la preuve de l'assertion 1).

Pour prouver l'assertion 2) nous allons utiliser la "récurrence tordue" donnée au lemme précédent avec l'assertion suivante sur  $h \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,0}$

$$A(\sigma_1, \dots, \sigma_k) := \left( \{d(h.\alpha) \in u_1^{\sigma_1} \cdots u_k^{\sigma_k} . \Omega_{\mathbb{C}^2,0}^2\} \implies \{h \in u_1^{\sigma_1} \cdots u_k^{\sigma_k} . \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,0}\} \right)$$

Bien sur,  $\sigma_j \in [0, p_j - 1]$ ,  $\forall j \in [1, k]$  et  $A(0, \dots, 0)$  est vraie. Nous utiliserons les fonctions  $\phi_j(x) = \frac{x+1}{p_j}$  pour  $j \in [1, k]$ .

Supposons donc que  $A(\sigma_1, \dots, \sigma_k)$  soit vraie et que les conditions a) et b) de la "récurrence tordue" soient satisfaites. Considérons alors  $h \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,0}$  tel que

$$d(h.\alpha) \in (u_1^{\sigma_1} \cdots u_j^{\sigma_j+1} \cdots u_k^{\sigma_k}).\Omega_{\mathbb{C}^2,0}^2.$$

Alors grâce à  $A(\sigma_1, \dots, \sigma_k)$  on peut écrire

$$h = u_1^{\sigma_1} \cdots u_k^{\sigma_k} . h'$$

et il s'agit essentiellement de montrer que l'hypothèse

$$d(u_1^{\sigma_1} \cdots u_k^{\sigma_k} . h' . \alpha) \in (u_1^{\sigma_1} \cdots u_j^{\sigma_j+1} \cdots u_k^{\sigma_k}).\Omega_{\mathbb{C}^2,0}^2 \quad (*)$$

et les conditions a) et b) permettent de conclure que l'on a  $h' \in (u_j)$ .

Quelques calculs pénibles montrent que l'hypothèse (\*) donne que la forme

$$\begin{aligned} \omega &= h' . \sum_{i \neq j, i=1}^k (p_j . \sigma_i - p_i . \sigma_j) . u_1 \cdots \hat{u}_i \cdots \hat{u}_j \cdots u_k . \psi . du_i \\ &\quad - h' . \sigma_j u_1 \cdots \hat{u}_j \cdots u_k . d\psi + p_j . u_1 \cdots \hat{u}_j \cdots u_k . \psi . dh' \\ &\quad + h' . \sum_{i \neq j, i=1}^k (p_j - p_i) . u_1 \cdots \hat{u}_j \cdots \hat{u}_i \cdots u_k . \psi . du_i + (p_j - 1) . h' . u_1 \cdots \hat{u}_j \cdots u_k . d\psi \end{aligned}$$

vérifie  $\omega \wedge du_j \in (u_j).\Omega_{\mathbb{C}^2,0}^2$ .

Mais en regroupant les termes on obtient

$$\begin{aligned} \omega &= h' \sum_{i \neq j} (p_j(\sigma_i + 1) - p_i(\sigma_j + 1)).u_1 \cdots \hat{u}_i \cdots \hat{u}_j \cdots u_k.\psi.du_i \\ &\quad + (p_j - \sigma_j - 1).h'.u_1 \cdots \hat{u}_j \cdots u_k.d\psi + p_j.u_1 \cdots \hat{u}_j \cdots u_k.\psi.dh' \end{aligned}$$

Comme on a supposé  $p_j(\sigma_i + 1) - p_i(\sigma_j + 1) \geq 0 \quad \forall i \in [1, k]$ , c'est à dire que  $\phi_j(\sigma_j) = \frac{\sigma_j+1}{p_j}$  est l'infimum des  $\frac{\sigma_i+1}{p_i}$  pour  $i \in [1, k]$ , la fonction

$$\lambda = (h')^{p_j}.\psi^{p_j-\sigma_j-1}.\prod_{i \neq j} u_i^{p_j(\sigma_i+1)-p_i(\sigma_j+1)}$$

est holomorphe au voisinage de l'origine dans  $\mathbb{C}^2$  et la condition

$$\omega \wedge du_j \in (u_j).\Omega_{\mathbb{C}^2,0}^2$$

donne  $d\lambda \wedge du_j \in (u_j).\Omega_{\mathbb{C}^2,0}^2$ .

Donc la restriction de  $\lambda$  à la courbe lisse et connexe  $\{u_j = 0\} \setminus \{0\}$  est constante et on a

$$\lambda = \lambda_0 + u_j.L$$

avec  $\lambda_0 \in \mathbb{C}$  et  $L \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,0}$ .

Comme on a  $\sigma_j + 1 < p_j$  et  $\psi(0) = 0$ , la fonction  $\lambda$  est nulle en 0 et  $\lambda_0 = 0$ . Alors  $\lambda \in (u_j)$  et, puisque cet idéal est premier et ne contient ni  $\psi$  ni  $u_i, \forall i \neq j, i \in [1, k]$ , on aura  $h' \in (u_j)$  ce qui prouve  $A(\sigma_1 \cdots \sigma_j + 1 \cdots \sigma_k)$ . ■

On remarquera que la preuve de 4.2.3 utilise de façon essentielle le fait que  $\psi(0) = 0$ . Le cas  $\psi \equiv 1$  est donc plus délicat.

Preuve de 4.2.4. Le point 1) se prouve de façon analogue au 1) de la proposition précédente.

Pour le point 2) nous allons utiliser la même stratégie que précédemment mais avec

$$\begin{aligned} A(\sigma_1, \dots, \sigma_k) &:= \left( \{d(h.\alpha) \in u_1^{\sigma_1} \cdots u_k^{\sigma_k}.\Omega_{\mathbb{C}^2,0}^2\} \implies \right. \\ &\left. \{h = h_0 + h_1.u_1^{p_1-1} \cdots u_k^{p_k-1} \quad \text{avec} \quad h_0 \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,0} \text{ vérifiant } d(h_0.\alpha) \equiv 0\} \right). \end{aligned}$$

Comme  $A(0, \dots, 0)$  est trivialement vérifiée, montrons que si  $j \in [1, k]$  vérifie

$$\frac{\sigma_j + 1}{p_j} = \min_{l \in [1, k]} \left\{ \frac{\sigma_l + 1}{p_l} \right\} < 1$$

l'implication

$$A(\sigma_1, \dots, \sigma_k) \implies A(\sigma_1, \dots, \sigma_j + 1, \dots, \sigma_k)$$

est vraie.

Soit donc  $h \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,0}$  tel que

$$d(h.\alpha) \in (u_1^{\sigma_1} \cdots u_j^{\sigma_j+1} \cdots u_k^{\sigma_k}).\Omega_{\mathbb{C}^2,0}^2$$

et supposons que  $A(\sigma_1, \dots, \sigma_k)$  soit vraie. Alors on peut écrire

$$h = h_0 + h_1.u_1^{\sigma_1} \cdots u_k^{\sigma_k}$$

avec  $h_1 \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,0}$  et  $h_0 \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,0}$  vérifiant  $d(h_0.\alpha) \equiv 0$ . L'hypothèse est alors que

$$d(h_1.\alpha) \in (u_1^{\sigma_1} \cdots u_j^{\sigma_j+1} \cdots u_k^{\sigma_k}).\Omega_{\mathbb{C}^2,0}^2.$$

Les calculs de la proposition précédente restent valables ( avec  $\psi \equiv 1$ ) et conduisent à

$$\omega \wedge du_j \in u_j.\Omega_{\mathbb{C}^2,0}^2.$$

avec

$$\omega = h_1 \cdot \sum_{i \neq j} (p_j(\sigma_i + 1) - p_i(\sigma_j + 1)).u_1 \cdots \hat{u}_i \cdots \hat{u}_j \cdots u_k.du_i + p_j.u_1 \cdots \hat{u}_j \cdots u_k.dh_1$$

Si  $\lambda = (h_1)^{p_j} \cdot \prod_{i \neq j} u_i^{p_j(\sigma_i+1) - p_i(\sigma_j+1)}$  la fonction  $\lambda$  sera holomorphe au voisinage de l'origine et on aura

$$d\lambda \wedge du_j \in u_j.\Omega_{\mathbb{C}^2,0}^2.$$

On peut donc écrire  $\lambda = \lambda_0 + u_j.L$  avec  $\lambda_0 \in \mathbb{C}$  et  $L \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,0}$ .

- premier cas : il existe  $i_o \in [1, k]$  tel que l'on ait :  
 $p_j(\sigma_{i_o} + 1) - p_{i_o}(\sigma_j + 1) > 0$  (on remarquera que le choix de  $j$  fait que tous les entiers  $p_j(\sigma_{i_o} + 1) - p_{i_o}(\sigma_j + 1)$  sont positifs ou nuls).  
Alors comme  $u_{i_o}(0) = 0$ , on aura  $\lambda_0 = \lambda(0) = 0$ . On en déduit que l'on a  $h_1 \in (u_j)$ , ce qui prouve le résultat cherché dans ce cas.
- deuxième cas : On a  $p_j(\sigma_i + 1) - p_i(\sigma_j + 1) = 0, \forall i \in [1, k]$ .  
On a alors simplement  $\lambda = h_1^{p_j}$  et  $d\lambda \wedge du_j \in u_j.\Omega_{\mathbb{C}^2,0}^2$  donne

$$p_j.h_1^{p_j-1}.dh_1 \wedge du_j \in u_j.\Omega_{\mathbb{C}^2,0}^2.$$

Si on a  $\lambda_0 = 0$  alors l'égalité  $h_1^{p_j} = u_j.L$  permet immédiatement de conclure.  
Si on a  $\lambda_0 \neq 0$  alors  $h_1$  est inversible près de l'origine et on aura

$$dh_1 \wedge du_j \in u_j.\Omega_{\mathbb{C}^2,0}^2$$

d'où  $h_1 = h_1(0) + u_j.H$  avec  $H \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,0}$ .

Posons alors  $\delta := \frac{\sigma_j+1}{p_j}$  ( $= \frac{\sigma_i+1}{p_i}, \forall i \in [1, k]$ !). On obtient

$$\begin{aligned} u_1^{\sigma_1} \cdots u_k^{\sigma_k}.\alpha &= \sum_{l=1}^k p_l.u_1^{\sigma_1+1} \cdots u_l^{\sigma_l} \cdots u_k^{\sigma_k+1}.du_l \\ &= \frac{1}{\delta} \sum_{l=1}^k (\sigma_l + 1).u_1^{\sigma_1+1} \cdots u_l^{\sigma_l} \cdots u_k^{\sigma_k+1}.du_l = \frac{1}{\delta} d(u_1^{\sigma_1+1} \cdots u_k^{\sigma_k+1}). \end{aligned}$$

On aura donc  $d(h_1(0).u_1^{\sigma_1} \cdots u_k^{\sigma_k}.\alpha) = 0$  et on peut poser  $h'_0 := h_1(0).u_1^{\sigma_1} \cdots u_k^{\sigma_k}$  et  $h'_1 = H$  pour avoir  $h = h_0 + h'_0 + h'_1.u_1^{\sigma_1} \cdots u_j^{\sigma_j+1} \cdots u_k^{\sigma_k}$  avec  $d((h_0 + h'_0).\alpha) \equiv 0$ . ■

**Remarque.**

Soit  $\Delta = p.g.c.d.(p_1 \cdots p_k)$ . Alors si  $\Delta = 1$  on ne rencontre pas de  $h_0 = u_1^{\sigma_1} \cdots u_k^{\sigma_k}$  vérifiant  $d(h_0.\alpha) = 0$ . En effet, si on a  $\forall i \in [1, k] \frac{\sigma_i+1}{p_i} = \frac{u}{v} < 1$ , avec  $p.g.c.d.(u, v) = 1$ , on en déduit que  $\sum_{i=1}^k a_i.p_i = 1$ , donne

$$\sum_{i=1}^k a_i.p_i.u = u = \sum_{i=1}^k a_i.(\sigma_i + 1).v$$

ce qui est impossible puisque  $u \notin \mathbb{Z}.v$ .

Par contre, si  $\Delta > 1$ , en posant  $p_i = \Delta.\sigma_i$  on obtient immédiatement que  $d(u_1^{\sigma_1-1} \cdots u_k^{\sigma_k-1}.\alpha) = 0$ .

### 4.3 Suspensions.

Considérons maintenant une fonction  $f : (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  admettant une singularité isolée à l'origine et une fonction  $g : (\mathbb{C}^{p+1}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  vérifiant l'hypothèse (HI).

Alors la fonction  $F : (\mathbb{C}^{n+p+1}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  définie par  $F(x, y) = f(x) + g(y)$  vérifie l'hypothèse (HI) : en effet le lieu singulier de  $F$  est bien de dimension 1 au voisinage de l'origine dans  $\mathbb{C}^{n+p+2}$  puisqu'il est ensemblistement le produit des lieux singuliers de  $f$  et  $g$  ; et si le champ de vecteur holomorphe  $\sum_{i=0}^p a_i \frac{\partial}{\partial y_i}$  annule  $g$  il annulera également  $F$ .

**Lemme 4.3.1** *Sous les hypothèses précisées ci-dessus on a :*

$$(Ker dF)^{n+p+1} = \Omega_{\mathbb{C}^{n+1}}^{n+1} \rtimes Ker dg^p + dF \wedge \Omega_{\mathbb{C}^{n+p+2}}^{n+p} .$$

*Preuve.* Soient  $\pi_1$  et  $\pi_2$  les projections de  $\mathbb{C}^{n+p+2} \equiv \mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}^{p+1}$  sur  $\mathbb{C}^{n+1}$  et  $\mathbb{C}^{p+1}$  respectivement. Le produit tensoriel externe  $\mathcal{F} \rtimes \mathcal{G}$  de faisceaux de  $\mathcal{O}$ -modules (respectivement de complexes de  $\mathcal{O}$ -modules) sur  $\mathbb{C}^{n+1}$  et  $\mathbb{C}^{p+1}$  désignera le produit tensoriel usuel

$$\pi_1^*(\mathcal{F}) \otimes \pi_2^*(\mathcal{G}) \quad \text{sur} \quad \mathcal{O}_{\mathbb{C}^{n+p+2}}$$

Considérons les complexes  $K^\bullet(f) := (\Omega_{\mathbb{C}^{n+1}}^\bullet, \wedge df)$  et  $K^\bullet(g) := (\Omega_{\mathbb{C}^{p+1}}^\bullet, \wedge dg)$  où  $\Omega_{\mathbb{C}^{n+1}}^i$  est en degré  $i - (n + 1)$  (resp.  $\Omega_{\mathbb{C}^{p+1}}^i$  en degré  $i - (p + 1)$ ).

Comme  $f$  est à singularité isolée en 0 dans  $\mathbb{C}^{n+1}$  le complexe  $K^\bullet(f)$  est exact en degrés strictement négatifs. Il en est de même pour  $\pi_1^*(K^\bullet(f))$  car  $\pi_1$  est plat.

On a

$$K^\bullet(F) := (\Omega_{\mathbb{C}^{n+p+2}}^\bullet, \wedge dF) \simeq K^\bullet(f) \rtimes K^\bullet(g)$$

d'où l'on déduit que

$$H^{-1}(K^\bullet(F)) \simeq H^0(K^\bullet(f)) \rtimes H^{-1}(K^\bullet(g)) .$$

Ce qui donne les isomorphismes :

$$\begin{aligned} \frac{(Ker dF)^{n+p+1}}{dF \wedge \Omega_{\mathbb{C}^{n+p+2}}^{n+p}} &\simeq \frac{\Omega_{\mathbb{C}^{n+1}}^{n+1}}{df \wedge \Omega_{\mathbb{C}^{n+1}}^n} \rtimes \frac{(Ker dg)^p}{dg \wedge \Omega_{\mathbb{C}^{p+1}}^{p-1}} \\ &\simeq \frac{\Omega_{\mathbb{C}^{n+1}}^{n+1} \rtimes (Ker dg)^p}{df \wedge \Omega_{\mathbb{C}^{n+1}}^n \wedge \pi_2^*((Ker dg)^p) + \Omega_{\mathbb{C}^{n+1}}^{n+1} \wedge dg \wedge \pi_2^*(\Omega_{\mathbb{C}^{p+1}}^{p-1})} . \end{aligned}$$

Pour conclure, il suffit de constater que l'on a l'inclusion :

$$df \wedge \Omega_{\mathbb{C}^{n+1}}^n \wedge \pi_2^*((Ker dg)^p) + \Omega_{\mathbb{C}^{n+1}}^{n+1} \wedge dg \wedge \pi_2^*(\Omega_{\mathbb{C}^{p+1}}^{p-1}) \subset dF \wedge \Omega_{\mathbb{C}^{n+p+2}}^{n+p} \quad \blacksquare$$

**Proposition 4.3.2** *Sous les hypothèses considérées ci-dessus, si la fonction  $g$  vérifie l'hypothèse (HI) et la condition (P), il en sera de même pour la fonction  $F$ .*

*Preuve.* Montrons que  $F$  vérifie la condition (P).

Soit donc  $\alpha \in (Ker dF)^{n+p+1}$  vérifiant  $d\alpha \in \widehat{J(F)}.\Omega_{\mathbb{C}^{n+p+2}}^{n+p+2}$ . Ceci équivaut, par définition de l'idéal  $\widehat{J(F)}$ , à demander que  $d\alpha$  soit une section du faisceau  $dF \wedge \Omega^{n+p+1}$  en dehors de l'origine. Mais grace au lemme 4.3.1 on peut écrire

$$\alpha = dx \wedge \beta + dF \wedge \omega \quad \text{avec} \quad \beta \in \pi_2^*((Ker dg)^p) .$$

Comme  $d(dF \wedge \omega) \in dF \wedge \Omega^{n+p+1}$  la condition imposée à  $\alpha$  équivaut à demander que  $dx \wedge \beta$  soit dans  $(J(f) + J(g)).\Omega^{n+p+2}$  en dehors de l'origine. Décomposons alors

$$\mathcal{O}_{\mathbb{C}^{n+1},0} = J(f)_0 \oplus V$$

où  $V$  est un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie (égale au nombre de Milnor de  $f$  en 0). Décomposons le germe de  $\beta$  le long de  $\{0\} \times \mathbb{C}^{p+1}$  sous la forme  $\beta = \beta_0 + \beta_1$  avec

$$\beta_0 \in J(f)_0 \rtimes (Ker dg)^p \quad \text{et} \quad \beta_1 \in V \otimes_{\mathbb{C}} \pi_2^{-1}((Ker dg)^p)$$

où  $\pi_2^{-1}$  désigne l'image réciproque ensembliste du faisceau .

Comme la différentielle partielle en  $y$  laisse  $J(f)$  stable, la condition sur  $d\alpha$  est équivalente à demander que  $d_{/y}\beta_1 \in V \otimes J(g).\Omega_{\mathbb{C}^{p+1}}^{p+1}$  en dehors de l'origine dans

$\mathbb{C}^{p+1}$  <sup>7</sup>. Mais puisque  $g$  vérifie la propriété (P) on peut écrire

$$\beta_1 = \Lambda + dg \wedge M \quad \text{avec} \quad \Lambda \in V \otimes \pi_2^{-1}[(Ker dg_0)^p \cap Ker d]$$

$$\text{et} \quad M \in V \otimes \pi_2^{-1}[\Omega_{\mathbb{C}^{p+1},0}^{p-1}]$$

On conclut alors car on a

$$\begin{aligned} dx \wedge \Lambda &\in \Omega_{\mathbb{C}^{n+1},0}^{n+1} \rtimes ((Ker dg)^p \cap Ker d)_0 \subset ((Ker dF)^{n+p+1} \cap Ker d)_0 \\ \text{et} \quad dx \wedge dg \wedge M &\in (dF \wedge \Omega^{n+p})_0 \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**Remarque.**

La proposition précédente combinée avec les propositions 4.2.3 et 4.2.4 fournit beaucoup d'exemples de fonctions vérifiant l'hypothèse (HI) et satisfaisant également la condition (P).

Plus précisément, elle donne, pour chaque nouvel exemple de fonction vérifiant (HI) et satisfaisant la condition (P) une nouvelle famille d'exemples. Cela justifie d'explorer la condition (P) sur les fonctions les plus simples vérifiant (HI) pour  $n = 2$ .

**Proposition 4.3.3** *On suppose que la fonction  $f$  est à singularité isolée à l'origine de  $\mathbb{C}^{n+1}$  et que la fonction  $g$  vérifie l'hypothèse (HI) et la condition (P), au voisinage de l'origine dans  $\mathbb{C}^{p+1}$ . Considérons les (pre)-(a,b)-modules*

$$E'_f := \frac{\Omega_{\mathbb{C}^{n+1},0}^{n+1}}{df \wedge d\Omega_{\mathbb{C}^{n+1},0}^{n-1}} \quad E'_g := \frac{\Omega_{\mathbb{C}^{p+1},0}^{p+1}}{d((Ker dg)_0^p)} \quad \text{et} \quad E'_F := \frac{\Omega_{\mathbb{C}^{n+p+2},0}^{n+p+2}}{d((Ker dF)_0^{n+p+1})}$$

Alors l'application donnée par produit extérieur

$$\Lambda : E'_f \otimes_{a,b} E'_g \rightarrow E'_F$$

induit un isomorphisme entre les (a,b)-modules associés.

*Preuve.* Grâce au lemme de Nakayama, il suffit de voir que l'application induite  $E'_f/b.E'_f \otimes E'_g/b.E'_g \rightarrow E'_F/b.E'_F$  est un isomorphisme. Ceci résulte facilement des isomorphismes suivants

$$\mathcal{O}/J(f) \otimes \widehat{J(g)}/J(g) \simeq \frac{\widehat{J(g)}}{J(f) \cap \widehat{J(g)} + J(g)} \simeq \widehat{J(F)}/J(F)$$

---

<sup>7</sup>on remarquera que  $J(f).dx \rtimes Ker dg^p \subset dF \wedge \Omega^{n+p+1}$  et donc que l'on a

$$\alpha = dx \wedge \beta_1 \quad \text{modulo} \quad dF \wedge \Omega^{n+p}.$$

$$\mathcal{O}/J(f) \otimes E'_g/jE''_g \simeq E'_F/jE''_F$$

et du diagramme commutatif aux lignes exactes :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}/J(f) \otimes \widehat{J(g)}/J(g) & \longrightarrow & E'_f/b.E'_f \otimes E'_g/b.E'_g & \longrightarrow & \mathcal{O}/J(f) \otimes E'_g/jE''_g \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \widehat{J(F)}/J(F) & \longrightarrow & E'_F/b.E'_F & \longrightarrow & E'_F/jE''_F \longrightarrow 0. \end{array}$$

Ceci achève la démonstration. ■

Pour une version un peu plus sophistiquée de ce résultat à la "Thom-Sebastiani", le lecteur pourra consulter [B.S. 04].

## References

- [B.84] D.Barlet : *Contribution du cup-produit de la fibre de Milnor aux poles de ...* Ann. Inst. Fourier (1984) t. 34, fasc.4, p.75-106.
- [B.91] D. Barlet : *Interaction de strates consécutives pour les cycles évanescents.* Ann. Scient. Ec. Norm. Sup., 4ème série, t. 24, (1991), p. 401-506.
- [B.93] D. Barlet : *Théorie des (a,b)-modules I.* in Complex Analysis and Geometry, Plenum Press, (1993), p.1-43.
- [B.95] D. Barlet : *Théorie des (a,b)-modules II. Extensions.* in Complex Analysis and Geometry, Pitman Research, Notes in Mathematics, série 366, (1997), p.19-59.
- [B.05] D. Barlet : *Interaction de strates consécutives II .* Publ. RIMS Kyoto University, vol 41 (2005), p.139-173.
- [B.04 a] D. Barlet : *Interactions de strates consécutives ... III : le cas de la valeur propre 1.* Prépublication de l' Institut E. Cartan (Nancy), 2004/38
- [B.04 b] D. Barlet : *Sur certaines singularités non isolées d'hypersurfaces II.* Prépublication de l' Institut E. Cartan (Nancy), 2005/42
- [Be.01] R. Belgrade : *Dualité et Spectres des (a,b)-modules.* Journal of Algebra 245, (2001), p.193-224.
- [Bj.93] J.-E. Bjork : *Analytic D-modules and Applications.* Mathematics and its Applications, vol.247, Kluwer 1993.
- [Br.70] E. Brieskorn : *Die Monodromie der isolierten Singularitäten von Hyperflächen.* Manuscripta Math. 2 (1970), p.103-161.

- [B.S. 04] D. Barlet and M. Saito : *Brieskorn Modules and Gauss-Manin systems for non isolated hypersurfaces singularities*. Prépublication de l' Institut E. Cartan (Nancy), 2004/54.
- [G.66] A. Grothendieck : *On the de Rham cohomology of algebraic varieties*. Publ. Math. IHES 29 (1966), p.93-101.
- [H.64] H. Hironaka : *Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero I. II*. Ann. Math. 79 (1964), p.109-203 and p. 205-326.
- [K.75] M. Kashiwara : *On the maximally over determined systems of differential equations*. Publ. R.I.M.S., vol.10, (1975), p.563-579.
- [M.74] B.Malgrange : *Intégrale asymptotique et monodromie*. Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. , t.7 (1974), p.405-430 ( On pourra consulter l'Appendice de [B.84] pour des détails sur le théorème de positivité pour un germe de fonction holomorphe (réduite) arbitraire.)
- [S.70] M. Sébastiani : *Preuve d'une conjecture de Brieskorn*. Manuscripta Math. 2 (1970), p.301-308.

Daniel Barlet,  
Université Henri Poincaré (Nancy I ) et Institut Universitaire de France,  
Institut E.Cartan UHP/CNRS/INRIA, UMR 7502 ,  
Faculté des Sciences et Techniques, B.P. 239  
54506 Vandoeuvre-les-Nancy Cedex , France.  
e-mail : barlet@iecn.u-nancy.fr