

# THÈSE

présentée pour obtenir le grade de  
**DOCTEUR DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE**

Spécialité :  
**INFORMATIQUE**

par  
**Dominique ROSSIN**

Titre de la thèse :  
**PROPRIÉTÉS COMBINATOIRES  
DE CERTAINES FAMILLES  
D'AUTOMATES CELLULAIRES**

Soutenue le 18 décembre 2000 devant le jury composé de :

M.	Jacques Mazoyer	Président
M.	Robert Cori	Directeur
MM.	Jacques Mazoyer Christopher Moore	Rapporteurs
MM.	Michel Morvan Rémy Mosseri Bruno Salvy Jean-Marc Steyaert Dominic Welsh	Examineurs



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>9</b>
<b>1 Présentation de l'automate cellulaire du Tas de Sable</b>	<b>13</b>
1.1 L'automate cellulaire . . . . .	13
1.1.1 Description de l'automate . . . . .	13
1.1.2 Éboulements, avalanches . . . . .	15
1.1.3 Étude d'un exemple . . . . .	17
1.2 Étude des configurations . . . . .	18
1.2.1 Introduction . . . . .	18
1.2.2 Configurations stables et configurations récurrentes . . . . .	19
1.2.3 Classes d'équivalence pour la relation $\mathcal{R}$ . . . . .	22
1.2.4 Caractérisation des configurations récurrentes . . . . .	25
1.3 Exemples . . . . .	26
1.3.1 Graphe dit de la maison . . . . .	26
1.3.2 Configurations récurrentes sur $K_n$ et fonctions de Parking . . . . .	28
<b>2 Le groupe du Tas de Sable</b>	<b>31</b>
2.1 Le groupe du Tas de Sable . . . . .	31
2.1.1 Structure algébrique des états récurrents . . . . .	31
2.1.2 Élément neutre et inverse . . . . .	32
2.1.3 Rôle du puits . . . . .	33
2.2 Cardinal du groupe . . . . .	34
2.2.1 Arbres couvrants du graphe . . . . .	34
2.2.2 Exemples . . . . .	37
<b>3 Structure du groupe</b>	<b>39</b>
3.1 Forme de Smith . . . . .	39
3.1.1 Définition . . . . .	39
3.1.2 Représentation des matrices . . . . .	39
3.1.3 Première phase d'élimination . . . . .	40
3.2 Forme de Smith générale . . . . .	40
3.2.1 Calcul du déterminant . . . . .	40
3.2.2 Calcul de la forme de Smith . . . . .	42

3.3	Exemple de décomposition de Smith . . . . .	43
3.3.1	Le graphe complet . . . . .	43
3.3.2	La roue . . . . .	44
3.3.3	Le graphe biparti complet . . . . .	46
3.3.4	Étude de la grille . . . . .	48
<b>4</b>	<b>Calcul de l'identité du groupe</b>	<b>53</b>
4.1	Calcul de l'identité . . . . .	53
4.1.1	Algorithme avec 2 additions . . . . .	53
4.1.2	Algorithme thermique . . . . .	54
4.1.3	Algorithme par classes pour le cas de la grille . . . . .	55
4.1.4	Comparaison des différentes méthodes . . . . .	57
4.2	Complexité théorique de l'addition par l'algorithme naïf . . . . .	59
4.2.1	Partition des arêtes . . . . .	59
4.2.2	Algorithme d'éboulement . . . . .	59
4.2.3	Étude de complexité de l'algorithme . . . . .	60
4.2.4	Étude de certaines familles de graphes . . . . .	63
4.3	Application à l'étude de l'identité sur des grilles rectangulaires . . . . .	67
4.3.1	Nouvelle formule pour l'identité . . . . .	68
4.3.2	Majoration de $k$ . . . . .	69
4.3.3	Minoration de $k$ . . . . .	70
4.3.4	Étude de la frontière . . . . .	70
4.3.5	Exemples . . . . .	71
<b>5</b>	<b>Groupe des graphes planaires</b>	<b>73</b>
5.1	Graphes planaires . . . . .	73
5.1.1	Graphes planaires et dualité . . . . .	73
5.1.2	Configuration flèche . . . . .	74
5.1.3	Configuration sommets et faces . . . . .	75
5.2	Classe des graphes planaires . . . . .	75
5.3	Groupe du graphe dual d'un graphe planaire . . . . .	76
5.3.1	Isomorphisme de groupe . . . . .	76
5.3.2	Configurations de moyenne nulle . . . . .	76
5.3.3	Base de l'espace des cycles d'une carte planaire . . . . .	78
5.4	Application à différentes familles de graphes . . . . .	80
5.4.1	Le cas de la grille . . . . .	80
5.4.2	Cas des grilles à maille triangulaire et hexagonale . . . . .	81
<b>6</b>	<b>Configurations récurrentes et idéaux binomiaux</b>	<b>83</b>
6.1	Rappels . . . . .	83
6.1.1	Idéaux polynômiaux . . . . .	83
6.1.2	Ordre monomial . . . . .	84
6.1.3	Division de polynômes multivariés . . . . .	84

6.2	Base de Gröbner . . . . .	85
6.2.1	Définition . . . . .	85
6.2.2	Algorithme de Buchberger . . . . .	86
6.3	Idéal d'éboulement . . . . .	87
6.3.1	Parallèle entre configurations et polynômes . . . . .	87
6.3.2	Éboulement d'un ensemble de sommets . . . . .	89
6.4	Bases de Gröbner de l'idéal d'éboulement . . . . .	89
6.4.1	Base de Gröbner de l'idéal . . . . .	90
6.4.2	Base de Gröbner minimale . . . . .	92
6.5	Monômes irréductibles et configurations récurrentes . . . . .	93
6.5.1	Définition de la bijection . . . . .	94
6.5.2	Opération de groupe . . . . .	94
6.5.3	Application au calcul effectif de l'identité . . . . .	95
6.5.4	Exemple sur un graphe à 4 sommets . . . . .	97
6.5.5	Exemple sur la grille $3 \times n$ . . . . .	99
<b>7</b>	<b>Le jeu du caillou</b> . . . . .	<b>101</b>
7.1	Introduction . . . . .	101
7.2	Règle du jeu . . . . .	102
7.2.1	Définition des règles . . . . .	102
7.2.2	Un exemple de partie bleue . . . . .	102
7.2.3	Exemple de partie rouge . . . . .	103
7.2.4	Finitude du jeu . . . . .	104
7.2.5	Programme . . . . .	104
7.3	Partie rouge . . . . .	104
7.4	Partie bleue . . . . .	105
7.4.1	Partition des sommets . . . . .	105
7.4.2	Nombre minimal de cailloux dans une configuration . . . . .	106
7.4.3	Étude de $\mathcal{U}$ . . . . .	106
7.4.4	Étude de $\mathcal{E}$ . . . . .	106
7.4.5	Ensemble couvrant et $\kappa(G)$ . . . . .	108
7.5	Exemples . . . . .	110
7.5.1	Arbres $n$ -aires complets . . . . .	110
7.5.2	Grille . . . . .	112



# Remerciements

Et voilà deux années de thèse qui s'achèvent. L'heure est maintenant venue de remercier toutes les personnes qui ont de près ou de loin participé à la réalisation de ce travail.

La première personne que je tiens tout particulièrement à remercier est mon directeur de thèse, Robert Cori. Je l'ai tout d'abord eu comme professeur lors de mes études à l'X avant de travailler avec lui sur les Tas de sable lors de mon DEA.

Ses qualités pédagogiques lors de mes études d'ingénieur et de DEA, l'excellent encadrement dont il a fait preuve durant ma thèse, sans oublier ses qualités extra-professionnelles ont largement contribué au bon déroulement de ma thèse et de mes études.

Finir une thèse, c'est l'occasion de réunir l'ensemble de ses amis, parents ou encore relations professionnelles. La soutenance est donc le moment où l'on partage ses années d'études avec ces personnes. Ainsi, j'aimerais remercier Jacques Mazoyer d'avoir accepté de présider mon jury de soutenance, tâche dont il s'est acquitté de très belle manière. Merci encore à Jacques et à Christopher Moore d'avoir été rapporteurs pour mon manuscrit.

Je n'oublie pas les membres de mon jury : Rémy Mosseri, qui tout en étant physicien a accepté de faire partie de mon jury ; Bruno Salvy, Dominic Welsh, ou encore Jean-Marc Steyaert qui a lui aussi suivi ma scolarité depuis l'X, enfin Michel Morvan qui n'a malheureusement pas pu assister à la soutenance.

Je continuerai par quelques personnes qui ont agrémenté et facilité mon séjour au LIX. La première est son directeur, Michel Weinfeld, qui a contribué à la bonne marche du laboratoire et à la bonne ambiance générale ; Jean-Marc Steyaert, chef de l'équipe algorithmique, pour sa constante disponibilité à répondre aux questions les plus diverses et variées ; Evelyne, pour son aide fréquente ; Houy et Gérard sans qui l'informatique pratique n'existerait pas.

La thèse est aussi l'occasion de rencontrer différentes personnes et de travailler avec elles : je tiens particulièrement à remercier ici mes co-auteurs Robert Cori, Fedor Fomin, Yvan Le Borgne, Jean-Christophe Novelli, Bruno Salvy.

À tous les thésards avec qui j'ai passé ces années au laboratoire : Mireille Fouquet, Pierrick Gaudry, Dominique Poulalhon, Emmanuel Thome, sans oublier nos voisins du GAGE : Eric Schost, Anne Fredet, Alexandre Sedoglavic, Grégoire Lecerf.

Enfin, Jérôme, Diana, Daniel, Nicolas, Sébastien, Gilles, Radhia, Philippe, François, Bernadette et j'en oublie avec qui j'ai partagé mon bureau ou les innombrables pauses café-discussion.

Merci à mes parents et à ma famille.

Merci aussi à mes amis qui se sont déplacés pour venir m'écouter : Fred, Thomas, Yann, Nath, Jean-Christophe, Natha, Elodie, Magic, Hobbes et aux autres qui n'ont malheureusement pas pu assister à ma soutenance : Olivier, Philippe, Jérôme..

Enfin, une mention particulière à Karine.

# Introduction

## *Motivation de l'étude*

L'étude et la compréhension de phénomènes naturels qu'il semble difficile de prédire, tels les tremblements de terre et les raz de marée intriguent depuis quelques temps un certain nombre de physiciens. En effet, il semble que les modèles classiques basés sur des fonctions d'état continues peuvent difficilement expliquer les phénomènes observés.

Ainsi, de nombreux travaux se sont orientés vers des modèles discrets qui permettent dans certains cas de rendre compte des comportements observés et dont l'étude mathématique donne lieu à des développements pleins d'intérêt.

En 1987, Bak, Tang et Wiesenfeld [BTW87] introduisent un modèle basé sur un automate particulier dont l'étude expérimentale montre certaines caractéristiques proches de celles observées pour des tremblements de terre. Cet automate appelé automate du tas de sable a permis dans les années qui ont suivi de donner de nombreux résultats sur les exposants critiques apparaissant physiquement [CB91],[BTW88].

L'introduction des automates cellulaires, modèle discret combinatoire, permet en effet de rendre compte des brusques changements d'états du système que les modèles continus issus de la physique ne pouvaient expliquer. Un des exemples les plus couramment employé pour expliquer ces phénomènes chaotiques est le suivant :

*Un battement d'aile de papillon en Chine peut provoquer un raz de marée en europe.*

Cette maxime traduit le fait qu'une légère perturbation locale du système peut induire un changement d'état général. On dit alors que le système est représenté par des états critiques auto-organisés. Le terme critique vient de la maxime précédente et auto-organisé provient du fait qu'il existe un ensemble d'états qui perturbés se stabilisent d'eux-mêmes dans un autre état de cet ensemble.

En 1990, Dhar, Ruelle, Sen et Verma [DRSV95] étudient les propriétés mathématiques de l'automate du tas de sable. À la suite de ces travaux plusieurs propriétés sur la détermination en moyenne et asymptotique du nombre de transitions (éboulements) a pu être déterminé [Dha90],[MD91], [DM94]. L'article cité plus haut jette les bases d'une théorie algébrique et combinatoire des états critiques du système.

Cet article s'intéresse tout particulièrement aux états critiques ou récurrents du système. Les auteurs montrent que l'on peut munir ces états d'une loi de groupe abélien fini. Cette caractérisation permet ainsi l'emploi de nombreuses méthodes algébriques. Ainsi, Dhar montre comment l'emploi de la théorie de Galois permet de donner la décomposition du

groupe dans le cas d'une grille rectangulaire ou carrée.

De manière très surprenante, on voit apparaître le modèle du tas de sable (sous le nom de *Chip Firing Game*) dans plusieurs travaux de théorie des graphes. Ainsi de façon semblait-il tout à fait indépendante de Dhar, Spencer introduit un jeu combinatoire sur un graphe basé sur le même automate que celui de Bak, Tang et Wiesenfeld. A la suite de Spencer, Lovasz, Björner et Schor donnent une caractérisation des jeux finis et infinis. [BLS91], [BL92]

Le formalisme introduit par Dhar s'étend naturellement à ce jeu combinatoire permettant de dégager une structure de groupe aux états récurrents de l'automate cellulaire. Ces états jouent un rôle important dans la physique et la compréhension de leur structure reste une des clés pour expliquer les phénomènes naturels.

Dans ces études, de nombreux problèmes algorithmiques émergent naturellement.

Les tests effectués par les physiciens sur le modèle mettent en évidence la relative difficulté de réaliser des opérations dans le groupe. Comme la recherche des exposants critiques et d'autres caractères nécessite la multiplication de tests sur des tailles relativement importante, il est nécessaire de connaître exactement la complexité de cette addition. Chris Moore [MN99] a montré la  $P$ -complétude de ce problème.

De plus, l'étude du groupe des états critiques passe évidemment par l'étude de l'élément identité. Or différents algorithmes permettent de calculer cet élément de manière plus ou moins efficace. L'étude théorique et pratique de ces complexités paraît alors incontournable.

Enfin, cet élément présente comme le font remarquer Dhar et O. Marguin des caractéristiques fractales fortes. Néanmoins aucune preuve ou étude n'est venue à ce jour confirmer ces observations.

Ainsi, l'étude combinatoire et algorithmique du groupe des états critiques apporte une dimension supplémentaire à ce domaine, c'est l'idée qui gouverne le présent travail.

### *Résultats obtenus*

Le premier problème auquel je me suis intéressé est le calcul de la complexité de l'addition dans le groupe. J'ai ainsi dans un premier temps démontré que sur un graphe à  $n$  sommets l'addition de deux configurations récurrentes pouvait être réalisée en  $O(n^4)$  éboulements. Ensuite, j'ai donné un exemple de graphe où cette borne est atteinte. Néanmoins, dans des cas particuliers de graphes, de diamètre borné ou dont le degré des sommets est borné, la complexité de cette opération est inférieure.

Cette complexité nous permet de donner une borne sur le temps de calcul de l'identité du groupe. J'ai implanté de manière efficace les différentes méthodes de calcul connues permettant d'obtenir cette configuration puis j'en propose une nouvelle dont la complexité expérimentale montre un gain d'un facteur 2 sur la meilleure méthode connue.

Je me suis ensuite penché sur l'étude du groupe du Tas de Sable et j'ai donné une méthode efficace pour calculer la décomposition du groupe en produit de groupes cycliques, obtenant ainsi la décomposition pour différentes familles de graphes. Dans le cas du graphe complet, on retrouve de manière surprenante les fonctions de parking qui avaient été introduites pour l'analyse d'un problème de hachage et qui ont donné lieu ensuite à de

jolis développements combinatoires.

Une voie permettant d'obtenir des algorithmes performants consiste à relier un problème à un domaine pour lequel de nombreux développements théoriques et logiciels ont été réalisés. C'est le cas des idéaux de polynômes et des bases de Grobner. Ainsi, avec R. Cori et B. Salvy nous avons eu l'idée d'associer un idéal de polynômes à un graphe.

On démontre alors de manière constructive que l'ensemble des polynômes d'éboulements constitue une base. On caractérise ensuite en terme de connexité sur le graphe le fait que cette base soit minimale pour un ordre monomial donné. Cette bijection donne naissance à un nouvel algorithme de calcul de l'identité du groupe à base de polyomino pour la grille.

La grille est un cas particulier de graphe planaire. On montre plus généralement que les groupes des graphes planaires n'ont pas de structure particulière mais que celle-ci est la même pour le graphe que pour tout dual géométrique.

Ce résultat nous donne une information supplémentaire sur le groupe de la grille, groupe intéressant tout particulièrement les physiciens.

Dans le cadre des configurations récurrentes, une question fondamentale a été de trouver le nombre minimal de grains dans une telle configuration. L'étude de ce problème a été réalisé sur des graphes orientés ou non. Dans le premier cas seules des bornes inférieures ont pu être donné [BLS91]. Dans le second on a pu montrer que ces bornes étaient en fait optimales. De manière similaire on peut se demander quel est le nombre minimal de grains sur une configuration pour que tous les sommets de celle-ci aient un grain de sable à l'origine ou induit par un éboulement. Nous démontrons que ce problème est équivalent à trouver un ensemble maximal indépendant du carré du graphe considéré.

### *Plan du manuscrit*

Le premier chapitre donne les définitions de l'automate tel qu'il a été introduit par Bak, le deuxième présentant la structure de groupe introduite par Dhar.

Le chapitre 3 est une mise à plat de certains algorithmes permettant de calculer la décomposition de Smith d'un groupe abélien fini. Cette étude est basé sur les différents programmes développés au cours de la thèse implémentant ces méthodes.

Le chapitre 4 porte plus particulièrement sur le calcul de l'identité du groupe et certaines propriétés remarquables de cet élément.

Dans le chapitre suivant, nous étudions le rapport entre le groupe du Tas de Sable sur un graphe planaire et le groupe sur un de ses duals géométriques.

Le suivant montre comment associer à chaque relation d'éboulement un binôme de  $\mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n]$  et la similitude résultante entre l'idéal engendré par ces polynômes et le groupe abélien du tas de sable.

Le dernier chapitre étudie plus particulièrement les problèmes d'extrémalité du nombre de grains dans une configuration récurrente et relie ce problème à un problème d'optimisation combinatoire connu.



# Chapitre 1

## Présentation de l'automate cellulaire du Tas de Sable

Nous présentons dans cette partie l'automate cellulaire du Tas de Sable dans le contexte où il a été introduit, l'ensemble des cellules formant une grille.

Nous étendrons cette définition au cas des multi-graphes quelconques. Enfin, nous définirons différentes sortes de configurations : positive, stable, récurrente et transiente.

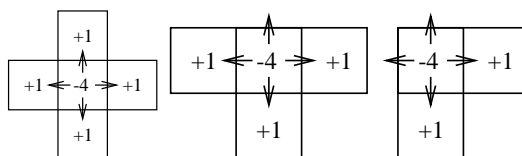
### 1.1 L'automate cellulaire

#### 1.1.1 Description de l'automate

##### Cas de la grille

Soit une grille rectangulaire de  $n \times p$  cellules ; sur chacune de ces cellules sont déposés des grains de sable. Nous définissons alors un jeu dont les règles sont les suivantes :

- Si une case possède 4 grains de sable ou plus, alors cette case perd 4 grains de sable et en donne un à chacun de ses voisins -à gauche, à droite, en haut et en bas-. On dit que cette case s'éboule.
- Si cette case se trouve sur un bord ou dans un angle de la grille, alors on considère qu'un ou deux grains tombent dans le vide, il y a perte de grains par le système.



Prenons maintenant un exemple sur une grille de taille 3 par 3.



que celui des autres sommets diminue.

Nous appellerons configuration  $u$  un  $n$ -uplet  $(u_1, \dots, u_n)$  représentant le graphe où  $u_i$  grains de sable sont placés sur le sommet  $i$ .

Par exemple nous noterons  $\Delta_i$  la configuration qui contient  $d_i$  grains sur le sommet  $i$  et  $-E(i, j)$  grains sur les sommets  $j \neq i$ . Ainsi  $\Delta_{i,i} = d_i$  et  $\Delta_{i,j} = -E(i, j)$ .

Remarquons alors que l'éboulement du sommet  $i$  dans la configuration  $u$  donne une configuration  $v$  telle que

$$v = u - \Delta_i$$

Considérons le graphe suivant dont les sommets sont grisés et le puits est noir :

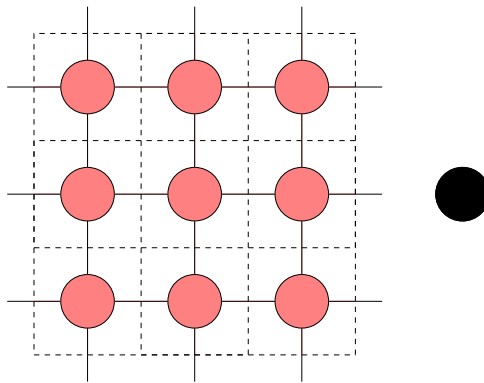


FIG. 1.2 – Graphe correspondant à la grille (Les arêtes libres sont reliés au puits représenté en noir.)

On remarque dans ce cas que le graphe correspond à la grille définie dans la partie précédente. Considérons maintenant la règle d'éboulement sur ce graphe. Comme tous les sommets sont de degré 4 sauf le puits la règle d'éboulement pour un sommet  $i$  est de perdre 4 jetons et d'en donner 1 ( $E(i, j)$ ) à chacun de ses voisins. On retrouve donc bien la règle concernant la grille.

### 1.1.2 Éboulements, avalanches

Nous avons brièvement présenté au paragraphe précédent l'automate cellulaire du Tas de Sable et nous avons vu sur un exemple le fonctionnement de cet automate.

À chaque étape, on détermine l'ensemble des sommets instables et on éboule un ou plusieurs de ces sommets jusqu'à obtention d'une configuration où tous les sommets sont stables. Nous allons montrer ici que ce processus se termine toujours dans le cas d'un graphe connexe et qu'il y a un phénomène de confluence à savoir que l'ordre dans lequel on effectue les éboulements n'a pas d'influence sur la configuration finale.

### Finitude des éboulements

**Définition 1.** On appelle configuration  $u$  sur un graphe  $G = (S, E)$  une application de  $S$  dans  $\mathbb{Z}^n$ . Ainsi, la configuration  $u = (u_1, \dots, u_n)$  sur  $G$  simule le fait de mettre  $u_i$  grains de sable (ou jetons) sur le sommet  $i$ .

Une configuration  $u$  est positive si  $u_i \geq 0$  pour tous les sommets. La configuration positive  $u$  est stable si chaque sommet possède un nombre de grains strictement inférieur à son degré, sinon, elle est instable : Certains sommets du graphe peuvent alors s'ébouler.

Nous allons montrer d'abord le résultat suivant :

**Proposition 1.** Soit  $G$  un graphe connexe avec un puits et  $u$  une configuration positive sur  $G$ , alors le nombre d'éboulements possibles à partir de  $u$  est fini.

Cela veut dire qu'au bout d'un temps  $t$ , le système atteint une configuration où chaque sommets a un nombre de jetons inférieur strictement au degré de ce sommet. La démonstration de cette proposition est simple.

*Démonstration.*

**Remarque 1.** Le nombre total de jetons (c'est à dire le nombre de jetons sur tous les sommets hormis le puits) est décroissant au sens large lors des opérations d'éboulements et sur chaque sommet, il ne peut y avoir qu'un nombre positif de jetons.

Supposons qu'il existe une configuration  $u$  et une suite infinie  $s = (s_i)_{i \in \mathbb{N}}$  d'éboulements possibles à partir de cette configuration.

Comme le nombre de sommets est fini, alors il existe un sommet  $i$  qui s'éboule un nombre infini de fois. Notons  $I$  l'ensemble des sommets qui s'éboulent une infinité de fois et  $S_t$  le nombre total de grains de sable sur ces sommets à l'instant  $t$ .

D'après la remarque 1, ce nombre est positif et décroissant au sens large à chaque opération d'éboulement. Or  $I$  ne pouvant contenir le puits, il existe un sommet  $i_0 \in I$  tel que  $i_0$  soit voisin d'un sommet  $j$  de  $S - I$ . Or à chaque éboulement de ce sommet, un grain de sable part de  $i_0$  pour aller sur  $j$  donc  $S_t$  est strictement décroissant lors de cette opération.

Comme  $i_0$  s'éboule une infinité de fois, cela contredit le fait que  $S_t$  soit positif pour tout  $t$ .  $\square$

### Unicité de l'état final

Partant d'une configuration  $u$  sur un graphe  $G$ , nous allons montrer le résultat suivant :

**Proposition 2.** Il existe un état stable et un seul atteint depuis une configuration positive  $u$  sur un graphe  $G$  par une suite valide d'éboulements. De plus, toutes les suites valides d'éboulements pour atteindre cette configuration se déduisent l'une de l'autre par permutation.

*Démonstration.* Afin de démontrer cette proposition, nous avons besoin de définir quelques notions. Nous dirons que la suite d'éboulements  $(s_i)_{i \in \{1 \dots n\}}$  est valide pour la configuration  $u$  si partant de  $u$  on peut ébouler le sommet  $s_1$  puis  $s_2$  jusqu'à  $s_n$ . Cela veut dire que

pour  $u$  le sommet  $s_1$  est instable. Après éboulement de ce sommet on se retrouve dans une configuration où le sommet  $s_2$  est instable et ainsi de suite jusqu'à  $s_n$ .

**Remarque 2.** Soient  $u$  une configuration sur un graphe  $G$  et  $i, j$  deux sommets instables dans cette configuration. Alors ébouler  $i$  puis  $j$  ou  $j$  puis  $i$  sont des suites valides d'éboulements qui conduisent à la même configuration.

Supposons que partant de la configuration  $u$  on puisse atteindre la configuration stable  $v$  et la configuration stable  $v'$  par des suites d'éboulements des sommets

$$\sigma = (s_1, s_2, \dots, s_k) \text{ et } \sigma' = (s'_1, s'_2, \dots, s'_l)$$

respectivement. On va montrer par récurrence que les suites sont égales à une permutation près. On suppose que

$$s_1 = s'_1, s_2 = s'_2, \dots, s_t = s'_t, s_{t+1} \neq s'_{t+1}$$

Alors  $u$  donne la configuration  $u_t$  par les éboulements  $s_1, \dots, s_t$ . Notons  $I_t$  les sommets  $i$  instables. Soit  $i \in I_t$ . Comme  $i$  a plus de 4 grains ce sommet va s'ébouler à un moment ultérieur.

$$t_1 = \min_j \{j \in t + 1 \dots k, s_j = i\}$$

$$t'_1 = \min_j \{j \in t + 1 \dots l, s'_j = i\}$$

Comme  $i$  est instable dans  $u_t$  alors on peut ébouler ce sommet au moment  $t + 1$ . Ainsi en appliquant itérativement la remarque 2, on montre que la série d'éboulement

$$(s_1, \dots, s_t, s_i, s_{t+1}, \dots, s_{t_1-1}, s_{t_1+1}, \dots, s_k)$$

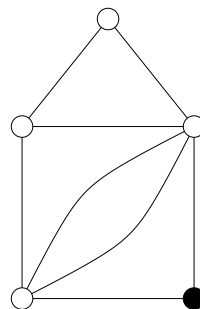
est valide et conduit à la même configuration que la série d'éboulements  $s$ . On a le même résultat pour  $s'$ . On obtient deux nouvelles suites qui sont identiques pour les  $t + 1$  premiers termes ; par récurrence sur la longueur des suites d'éboulement on a le résultat annoncé.  $\square$

Cela nous conduit à la définition suivante :

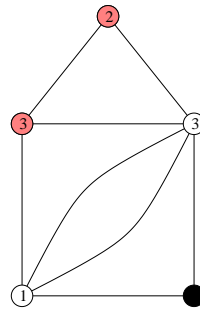
**Définition 2.** Soit  $u$  une configuration positive alors nous noterons  $\hat{u}$  la configuration stable obtenue après éboulements de tous les sommets instables possibles.

### 1.1.3 Étude d'un exemple

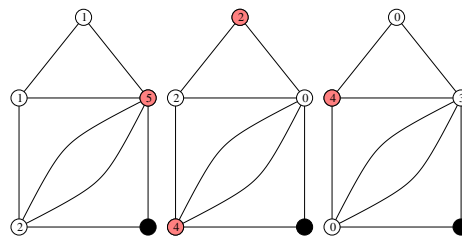
Considérons le multi-graphe suivant :



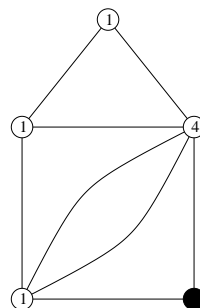
Soit une configuration positive sur ce graphe.



Réalisons les opérations d'éboulements possibles.



Alors la configuration stable associée est la suivante :



## 1.2 Étude des configurations

### 1.2.1 Introduction

Cette partie est consacrée à l'étude des configurations observables. Nous verrons qu'une classification naturelle peut en être faite suivant les principes de stabilité et certains critères liés aux chaînes de Markov.

Pour cela nous aurons besoin de différents résultats et notations sur les éboulements que nous présentons dans cette introduction.

**Définition 3.** Soit  $u$  et  $v$  deux configurations positives. Nous noterons  $u \longrightarrow v$  si on peut passer de  $u$  à  $v$  par l'éboulement d'un sommet. On a alors  $v = u - \Delta_i$  pour un certain sommet  $i$ . Nous noterons  $\xrightarrow{*}$  la clôture transitive de  $\longrightarrow$ ; Ainsi on a  $u \xrightarrow{*} v$  si et seulement s'il existe une suite  $u_1 = u, u_2, u_3, \dots, u_n = v$  de configurations telles que pour tout  $i$  ( $1 \leq i < n$ ) on ait  $u_i \longrightarrow u_{i+1}$ .

La configuration  $u + v$  est la configuration telle que  $(u + v)_i = u_i + v_i$ .

La proposition 2 nous permet de définir l'opérateur suivant :

**Définition 4.** Nous notons  $\oplus$  l'opérateur sur les configurations qui à deux configurations positives  $u$  et  $v$  associe l'unique configuration stable  $w$  obtenue par l'éboulement de  $u + v$ , avec les notations précédentes  $u \oplus v = \widehat{u + v}$

Dans la notation  $u \xrightarrow{*} v$  où  $u$  et  $v$  deux configurations positives, alors  $v$  n'est pas nécessairement stable.

**Remarque 3.** Si  $u, v, u', v'$  sont des configurations positives et si  $u \xrightarrow{*} u', v \xrightarrow{*} v'$  alors  $u + v \xrightarrow{*} u' + v'$ . Aussi, si  $u$  et  $v$  sont deux configurations positives on a la relation suivante :

$$u \oplus v = \widehat{\hat{u} + \hat{v}}$$

## 1.2.2 Configurations stables et configurations récurrentes

Il y a plusieurs approches pour définir les configurations récurrentes, celles-ci sont toutes équivalentes. Nous présenterons ici la première approche proposée dans le cadre de la simulation des phénomènes physiques.

### Approche Markovienne

Nous définissons un processus d'évolution sur les configurations de la manière suivante : Soit  $u$  une configuration stable quelconque

1. Tirer aléatoirement un sommet du graphe
2. Ajouter 1 grain de sable sur ce sommet et ébouler la nouvelle configuration jusqu'à obtenir une configuration stable

En répétant ce processus, nous construisons ainsi à l'étape 2 une suite de configurations stables. Dans cette suite, certaines configurations stables apparaissent une infinité de fois tandis que les autres n'apparaissent qu'un nombre fini de fois (voir nul). Ces configurations sont indépendantes de la configuration de départ choisie. Montrons ainsi le théorème suivant :

**Théorème 1.** Dans la chaîne de Markov définie précédemment, soit  $u$  la configuration de départ. Alors l'ensemble des configurations atteignables une infinité de fois depuis  $u$  ne dépend pas de  $u$ .

*Démonstration.* Considérons une configuration  $u$  et une chaîne de Markov partant de  $u$  et de configurations successives  $(u^{(i)})$ . Parmi cette suite supposons que la configuration  $v = u^{(j)}$  apparaisse un nombre infini de fois.

Nous notons  $a_i$  l'opérateur consistant à ajouter un grain de sable sur le sommet  $i$  et à ébouler la configuration ainsi obtenue.

**Proposition 3.** *Les opérateurs  $a_i$  commutent entre eux.*

*Démonstration.* La preuve de cette proposition découle directement de la remarque 2.  $\square$

Alors soit  $w$  une configuration quelconque. Il nous faut montrer que pour un certain tirage, partant de  $w$  on peut atteindre une infinité de fois la configuration  $v$ .

**Lemme 1.** *Il existe un tirage de nombre  $\alpha_i$  tel qu'en appliquant les opérateurs  $a_{\alpha_1}, a_{\alpha_2}, \dots, a_{\alpha_n}$  successivement à la configuration  $w$  on obtienne la configuration  $v$ .*

*Démonstration.* L'idée de la preuve est de trouver une configuration  $\beta$  telle que  $\beta \oplus w = v$ .

Considérons la première chaîne de Markov partant de  $u$  et atteignant une infinité de fois  $v$ . Alors on remarque qu'entre deux apparitions de  $v$  on a ajouté un certain nombre de grains  $\alpha_i$  sur chaque sommet. Soit  $\alpha$  la configuration contenant  $\alpha_i$  grains sur chaque sommet. Il est clair que :

$$u + k\alpha \xrightarrow{*} v$$

Soit  $d = \max\{d_i, i \in \{1 \dots n\}\}$ .  $d$  est le degré maximal des sommets du graphe.

Considérons alors la configuration  $(d+1)\alpha$ . Dans cette configuration il existe au moins un sommet  $i$  ayant  $d+1$  grains. Le contraire voulant dire que tous les sommets de  $\alpha$  ont 0 grain ce qui est impossible.

Par éboulement du sommet  $i$  la configuration  $(d+1)\alpha$  donne la configuration  $\Phi_1$  avec  $(\Phi_1)_i > 0$  et  $(\Phi_1)_j > 0$  pour  $j$  voisin de  $i$ .

Considérons maintenant la configuration  $(d+1)\Phi_1$ . Dans cette configuration, les sommets  $i$  et  $j$  avec  $j$  voisin de  $i$  ont au moins  $(d+1)$  grains. On éboule les sommets  $j$  voisins de  $i$  une fois et on obtient une nouvelle configuration  $\Phi_2$  telle que  $(\Phi_2)_i > 0$ ,  $(\Phi_2)_j > 0$  pour  $j$  voisin de  $i$  et  $(\Phi_2)_k > 0$  pour  $k$  voisin de  $j$ . On a donc trouvé une configuration telle que tous les sommets à distance au plus 2 de  $i$  aient un nombre strictement positif de grains.

Par récurrence, on peut construire une configuration  $\Phi_l$  telle qu'il existe  $k$  tel que

$$k\alpha \xrightarrow{*} d\Phi_l$$

et  $\Phi_l$  a un nombre de grains strictement positif sur chaque sommet.

Ainsi, dans la configuration  $d\Phi_l$  chaque sommet a au moins  $d$  grains de sable et

$$v + d\Phi_l \xrightarrow{*} v$$

On a donc  $w + (v + d\Phi_l - w) \xrightarrow{*} v$  et  $v + d\Phi_l - w$  est une configuration positive.  $\square$

Maintenant que l'on a atteint la configuration  $v$ , il suffit de rajouter  $\alpha_i$  grains sur chaque sommet  $i$  et d'ébouler le résultat pour obtenir à nouveau la configuration  $v$ . Ainsi on crée une chaîne de Markov partant de  $w$  où  $v$  apparaît un nombre infini de fois.  $\square$

**Définition 5.** *Une configuration est récurrente si elle apparaît une infinité de fois dans la chaîne de Markov définie précédemment; sinon elle est dite transitoire.*

### Approche par éboulements

**Définition 6.** Nous noterons par  $\delta$  la configuration qui contient  $d_i - 1$  grains de sable sur le sommet  $i$ .

**Proposition 4.** Une configuration stable  $u$  est récurrente si et seulement s'il existe une configuration positive  $v$  telle que

$$\delta + v \xrightarrow{*} u$$

*Démonstration.* Soit  $u$  une configuration stable telle qu'il existe une configuration  $v$  satisfaisant  $\delta + v \xrightarrow{*} u$ . On part de  $u$  et on lui ajoute  $\delta + v - u$ . On obtient à nouveau  $u$  après éboulement. Répétant cette addition on construit une chaîne de Markov où  $u$  apparaît un nombre infini de fois.

Réciproquement soit  $u$  un état apparaissant un nombre infini de fois dans la chaîne de Markov, alors cela veut dire que partant de la configuration  $u$  on peut revenir à la configuration  $u$  en ajoutant un certain nombre de grains de sable sur les sommets du graphe et en éboulant la configuration obtenue. Notons  $w$  la configuration correspondant au nombre de grains rajouté c'est à dire que  $w_i$  est le nombre de grains que l'on rajoute sur le sommet  $i$ . Il est évident que

$$u + kw \xrightarrow{*} u$$

Pour  $k$  assez grand on peut trouver une configuration  $v$  telle que

$$v_i > d_i - 1 \text{ et } kw \xrightarrow{*} v$$

Ainsi on a  $kw = \delta + w'$  et on peut écrire

$$(u + w') + \delta \xrightarrow{*} u$$

.

□

**Corrolaire 1.** Une configuration  $u$  est récurrente si et seulement s'il existe une configuration positive non nulle  $w$  telle que :

$$u + w \xrightarrow{*} u$$

*Démonstration.* Supposons  $u$  récurrente alors par la proposition 4, il existe une configuration positive  $v$  telle que :

$$\delta + v \xrightarrow{*} u$$

On en déduit immédiatement que :

$$u + (\delta - u + v) \xrightarrow{*} u$$

Et comme  $\delta - u$  est positive on a démontré l'implication.

Réciproquement soit  $u$  une configuration telle qu'il existe une configuration positive  $w$  satisfaisant

$$u + w \xrightarrow{*} u$$

Alors considérons la chaîne de Markov partant de la configuration  $u$  et ajoutant successivement  $w_i$  grains sur chaque sommet  $i$ . Dans cette chaîne la configuration  $u$  apparaît un nombre infini de fois donc est récurrente par définition.  $\square$

**Corrolaire 2.** *Soit  $v$  une configuration récurrente et soit  $u$  une configuration positive. Alors  $\widehat{u + v}$  est une configuration récurrente.*

### 1.2.3 Classes d'équivalence pour la relation $\mathcal{R}$

#### Définition de la relation $\mathcal{R}$

Dans cette partie nous considérons toutes les configurations de  $\mathbb{Z}^n$ . Ainsi on peut avoir un nombre négatif de grains sur certains sommets. Puis nous considérons les opérateurs d'éboulement  $\Delta_i$ . Nous définissons la relation  $\mathcal{R}$  suivante sur les configurations :

- Soit  $u$  et  $v$  deux configurations. On dira que  $u\mathcal{R}v$  si et seulement si

$$u - v \in \langle \Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n \rangle$$

c'est à dire si on peut passer de  $u$  à  $v$  par une suite d'éboulements ou d'anti-éboulements.

**Proposition 5.** *La relation  $\mathcal{R}$  est une relation d'équivalence sur l'espace des configurations.*

La preuve est directe.

#### Isomorphisme entre les configurations récurrentes et $\mathbb{Z}^n/\mathcal{R}$

Le but de cette partie est de montrer que parmi toutes les configurations en relation par  $\mathcal{R}$  avec une configuration  $u$ , il en existe une et une seule de récurrente.

Par similitude avec le cas où les configurations étaient positives nous définissons ici les opérateurs  $\dashrightarrow$  et  $\dashrightarrow^*$ . La différence principale étant qu'ici il n'y a pas nécessité pour un sommet d'être instable pour s'ébouler.

Soient  $u$  et  $v$  deux configurations (non nécessairement positives). Nous dirons que  $u \dashrightarrow v$  si on peut passer de  $u$  à  $v$  par un éboulement c'est-à-dire si il existe  $i$  tel que  $u = v - \Delta_i$ . Nous noterons par  $\dashrightarrow^*$  la clôture transitive de  $\dashrightarrow$ .

**Lemme 2.** *Soient  $u$  et  $v$  deux configurations telles que  $u\mathcal{R}v$ ; alors il existe une configuration  $w$  telle que*

$$w \dashrightarrow^* u \text{ et } w \dashrightarrow^* v$$

*Démonstration.* Comme  $u\mathcal{R}v$ , on a

$$u = v + \sum_{i=1}^n \alpha_i \Delta_i$$

où les  $\alpha_i$  sont des entiers. On peut écrire alors :

$$\begin{aligned} u &= v + \sum_{i=1}^n \alpha_i \Delta_i \\ &= v + \sum_{\alpha_i > 0} \alpha_i \Delta_i + \sum_{\alpha_j < 0} \alpha_j \Delta_j \end{aligned}$$

Il est évident alors que la configuration  $w = u - \sum_{\alpha_j < 0} \alpha_j \Delta_j$  répond aux conditions  $w \xrightarrow{*} u$

et  $w \xrightarrow{*} v$ . □

Soit  $\epsilon$  la configuration :

$$\epsilon = \delta + (\delta - \delta \oplus \delta)$$

Remarquons que  $\epsilon_i > 0$  pour tous les sommets sauf ceux de degré 1 mais ces sommets ne sont pas intéressants car ils ne peuvent pas contenir de grains de sable dans une configuration stable.

**Lemme 3.** *La configuration  $\epsilon$  est telle que :*

$$\delta + \epsilon \xrightarrow{*} \delta$$

*Démonstration.* Par définition on a :

$$\delta + \epsilon = \delta + \delta + (\delta - \delta \oplus \delta)$$

Grâce à la remarque 3, on en déduit :

$$\delta + \epsilon \xrightarrow{*} \delta \oplus \delta + (\delta - \delta \oplus \delta)$$

Mais cette configuration est identiquement égale à  $\delta$ . □

**Lemme 4.** *Une configuration  $u$  est récurrente si et seulement si :*

$$u + \epsilon \xrightarrow{*} u$$

*Démonstration.* Si  $u + \epsilon \xrightarrow{*} u$  alors  $u$  est récurrente par le corollaire 1 car  $\epsilon$  est positive.

Réciproquement, si  $u$  est récurrente alors par la proposition 4, il existe une configuration positive  $v$  telle que :

$$\delta + v \xrightarrow{*} u$$

On a ensuite :

$$\delta + v + \epsilon \xrightarrow{*} \epsilon + u$$

et par le lemme 3, on en déduit :

$$v + \delta + \epsilon \xrightarrow{*} v + \delta \xrightarrow{*} u$$

Par unicité de l'état stable atteint par éboulement, on en déduit le résultat. □

Nous pouvons maintenant démontrer le résultat principal pour ce chapitre :

**Théorème 2.** *Soit  $u$  une configuration de  $\mathbb{Z}^n$  : Il existe une et une unique configuration récurrente  $v$  telle que  $u\mathcal{R}v$ .*

*Démonstration.*

– Existence :

On vérifie aisément que :

$$\epsilon\mathcal{R}0$$

où 0 est la configuration qui contient 0 grains de sable sur les sommets.

En effet :

$$\begin{aligned}\epsilon &= \delta + (\delta - \delta \oplus \delta) \\ &= (\delta + \delta) - (\delta \oplus \delta) \\ &\overset{*}{\dashrightarrow} (\delta \oplus \delta) - (\delta \oplus \delta)\end{aligned}$$

Donc pour tout  $k$  on a la relation suivante :

$$(u + k\epsilon)\mathcal{R}u$$

Comme  $\epsilon$  a un nombre de grains strictement positif sur tous ses sommets sauf sur les sommets de degré 1, on peut écrire  $u + k\epsilon$  pour une valeur de  $k$  suffisamment grande comme  $\delta + u'$  où  $u'$  est une configuration positive.

Par la proposition 4, la configuration stable  $v$  issue de l'éboulement de la configuration  $\delta + u'$  est récurrente et de plus  $v\mathcal{R}u$ .

– Unicité de la configuration :

Supposons que  $u$  et  $v$  soient deux configurations récurrentes telles que  $u\mathcal{R}v$ . Par le lemme 2, il existe une configuration  $w$  telle que  $w \overset{*}{\dashrightarrow} u$  et  $w \overset{*}{\dashrightarrow} v$ . On pourrait conclure par l'unicité de l'éboulement vers un stable mais on peut avoir un nombre de grains négatif sur un sommet. Pour pallier à cet inconvénient on ajoute un nombre suffisamment grand de fois  $\epsilon$  aux deux termes de notre relations de manière que  $u + k\epsilon, w + k\epsilon$  et  $v + k\epsilon$  soient des configurations positives plus grandes que  $\delta$ .

On a ainsi les relations suivantes :

$$w + k\epsilon \overset{*}{\dashrightarrow} u + k\epsilon \text{ et } w + k\epsilon \overset{*}{\dashrightarrow} v + k\epsilon$$

Par le lemme 4, comme  $u$  et  $v$  sont récurrentes on a  $u + k\epsilon \overset{*}{\dashrightarrow} u$  et  $v + k\epsilon \overset{*}{\dashrightarrow} v$ . Ainsi  $u$  et  $v$  sont deux configurations stables obtenues par des suites valides d'éboulements à partir de la configuration  $w + k\epsilon$ . Par la proposition 2 ces deux configurations sont égales.

□

**Corrolaire 3.** *L'ensemble des configurations récurrentes est isomorphe à l'ensemble des classes d'équivalence définies par la clotûre transitive symétrique  $\mathcal{R}$  de  $\overset{*}{\dashrightarrow}$*

**Remarque 4.** Soient  $u, v$  deux configurations récurrentes. On aimerait calculer par exemple  $w = u \oplus (\delta - v)$ . Par les remarques précédentes  $w$  se situe dans la même classe d'équivalence que  $u + \delta - v$ .

Ainsi on peut démontrer le résultat suivant appelé "burning" algorithme par Dhar [DRSV95].

**Proposition 6.** Soit  $u$  une configuration positive alors  $u$  est récurrente si et seulement si :

$$u \oplus \beta = u$$

où  $\beta$  est la configuration telle que  $\beta_i = E(i, \text{puits})$ .

De plus, lors de l'avalanche, chaque sommet de  $u$  s'éboule une et une seule fois.

*Démonstration.* La preuve de cette proposition repose sur le fait que  $\beta \mathcal{R} 0$ . En effet,  $u + \beta$  est dans la même classe d'équivalence que  $u$ . De plus  $\widehat{u + \beta}$  est récurrent, donc par unicité de l'état récurrent dans chaque classe d'équivalence on a

$$\widehat{u + \beta} = u$$

On va montrer maintenant que tous les sommets s'éboulent un même nombre de fois. Notons  $n_i$  le nombre d'éboulements du sommet  $i$ . Supposons qu'il existe  $i$  tel que  $n_i \geq n_j$  pour tout  $j$  voisin de  $i$  et que cette inégalité est stricte pour au moins un voisin.

Alors comme on avait  $u_i$  grains sur le sommet  $i$  à l'origine, que ce sommet s'est éboulé  $n_i$  fois (il a donc perdu  $n_i d_i$  grains) et qu'il a gagné  $\sum n_j E(i, j)$  grains pour  $j$  voisin de  $i$ , le nombre final de grain est inférieur strictement au nombre initial. Or on obtient la même configuration. Donc tous les sommets s'éboulent le même nombre de fois.

Supposons que les sommets s'éboulent  $k$  fois avec  $k > 1$ , alors considérons un sommet  $i$  voisin du puits. Ce sommet a gagné  $E(i, \beta)$  grains lors de l'éboulement du puits et  $k \sum E(i, j)$  grains lors de l'éboulement de ses voisins, (sauf le puits)

Or il perd  $k d_i$  grains. Donc au total il aura perdu  $(k - 1)E(i, \beta)$ . Donc  $k = 1$ .  $\square$

#### 1.2.4 Caractérisation des configurations récurrentes

Le tableau suivant donne dans la seconde colonne des propriétés vérifiées par des configurations permettant de certifier que la configuration de la première colonne est récurrente.

Configuration	Propriétés
$\hat{u}$	$u \geq v$ et $v$ récurrente.
$u$	$\widehat{u + \beta} = u$
$u$	$\exists v > 0, \widehat{u + v} = u$

De nombreuses études ont été réalisés sur les configurations récurrentes de manière à mieux comprendre leur structure. Nous verrons par la suite une bijection entre ces configurations et les monômes irréductibles d'un certain idéal binomial appelé idéal d'éboulement.

Avant de citer d'autres études et résultats il nous faut ici expliquer les différents modèles employés pour le Tas de Sable. En effet, ce modèle a été étudié en parallèle par les combinatoriciens sous le nom de Chip-Firing game ou de dollar game . Pour le premier, il n'y a pas de puits. Ainsi, un certain nombre de grains ou chips est distribué sur un graphe puis les règles d'éboulement sont appliquées. De par l'absence de puits ce jeu peut se dérouler indéfiniment. Une première question est donc de regarder pour quelles distributions de grains le jeu est fini. Ce jeu a été étudié à la fois sur les graphes non-orientés ou ce genre question peut être résolu [BLS91] mais aussi sur les graphes non-orientés [BL92] où cette question demeure sans réponses .

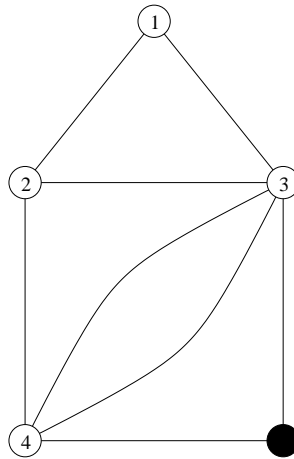
Dans le deuxième modèle dit jeu du dollar, un sommet est distingué et jouera alors un rôle similaire au puits. En effet, on place un certain nombre de grains sur les sommets du graphe sauf sur ce sommet puis on éboule toujours avec les mêmes règles la configuration ainsi formée. Lorsqu'aucun sommet ne peut s'ébouler on force le sommet distingué à s'ébouler puis on recommence ce processus. Il est facile de voir que partant d'une configuration, on atteint toujours un cycle partant de la configuration récurrente associée, l'éboulement du sommet distingué se comporte alors exactement comme l'addition de  $\beta$  et la fin du cycle est l'éboulement de tous les autres sommets du graphe pour obtenir à nouveau la configuration récurrente. Avant d'atteindre ce cycle le système passe par une série de configurations stables qui sont les configurations transitoires introduites précédemment.

## 1.3 Exemples

Dans cette partie, nous allons montrer sur l'exemple du graphe maison comment se compose les classes d'équivalences sur les configurations et énumérer les configurations récurrentes.

### 1.3.1 Graphe dit de la maison

Soit le graphe *maison* suivant avec la numérotation indiquée ci dessous :

FIG. 1.3 – Numérotation des sommets pour le graphe *maison*

Nous nous limiterons à l'étude des configurations stables de ce graphe. Au vu des degrés des sommets, comme pour une configuration stable  $u$ , on a  $u_i < d_i$  il y a ici 120 configurations stables.

Parmi ces configurations, nous allons partager les récurrentes des transcientes. Le tableau ci-dessous donne les 31 configurations récurrentes.

$u_1$	$u_2$	$u_3$	$u_4$
0	1	2/3	3
0	1	4	1/2/3
0	2	1/2/3	3
0	2	4	$x$
1	0	2/3	3
1	0	4	1/2/3
1	1	2/3	3
1	1	4	$x$
1	2	0/1/2/3	3
1	2	4	$x$

Le  $x$  représente un nombre de grains quelconque entre 0 et 3.

Nous déterminons la configuration  $\epsilon$  définie précédemment et qui jouera un rôle important dans les prochains chapitres. Cette configuration se situe dans la même classe d'équivalence que 0 qui est la configuration qui contient 0 grain de sable en tout sommet.

Par définition on a  $\epsilon = \delta + (\delta - \delta \oplus \delta)$ .

Or comme  $\delta = (1, 2, 4, 3)$  on en déduit

$$\delta + \delta = (2, 4, 8, 6)$$

et donc  $\delta \oplus \delta = (1, 2, 4, 1)$ . Ainsi  $\delta - (\delta \oplus \delta) = (0, 0, 0, 2)$ . Finalement on obtient  $\epsilon = (1, 2, 4, 5)$  et  $\hat{\epsilon} = (1, 2, 2, 3)$

### 1.3.2 Configurations récurrentes sur $K_n$ et fonctions de Parking

#### Fonction de Parking

Imaginons  $n$  automobilistes arrivant l'un après l'autre dans un parking à  $n$  places numérotées de 1 à  $n$ . Chaque automobiliste choisit un numéro de place  $p_i$  entre 1 et  $n$ . Lorsque l'automobiliste  $k$  arrive au Parking il essaye de se garer à la place qu'il a choisi. Si cette place est occupée alors il se gare à la place suivante  $k + 1$  et ainsi de suite. Si toutes les places de  $k$  à  $n$  sont occupées alors il repart. On dira que la suite  $p_1, p_2, \dots, p_n$  est de Parking si tous les automobilistes, choisissant par ordre d'arrivée la place  $p_1$  pour le premier,  $p_2$  pour le suivant  $p_n$  pour le dernier, arrivent à se garer.

Nous noterons  $\mathcal{P}_n$  l'ensemble des suites de Parking à  $n$  éléments. Une définition plus formelle de ces suites peut être formulée de la manière suivante :

**Définition 7.** Soit  $p_1, \dots, p_n$  des nombres compris entre 1 et  $n$ . On dit que cette suite est de Parking si il existe une permutation  $\sigma$  de  $\{1 \dots n\}$  telle que  $\sigma(i) \geq p_i$ .

**Remarque 5.** Le nombre de fonctions de Parking à  $n$  éléments est  $(n + 1)^{n-1}$

*Démonstration.* Je donne ici une démonstration simple de cette énumération qui est due à Pollack.

Plaçons nous dans un parking circulaire de  $n + 1$  places numérotées de 1 à  $n + 1$  comme le montre la figure ci-dessous.

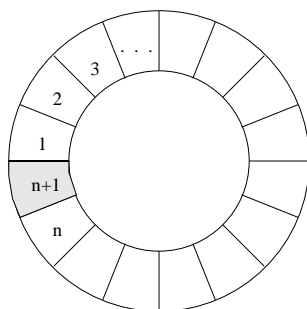


FIG. 1.4 – Fonction de Parking circulaire

Supposons maintenant que les  $n$  voitures arrivant choisissent une place entre 1 et  $n + 1$  alors si une voiture choisit la place  $k$  et si celle-ci est occupée, la voiture va essayer de se garer en  $k + 1$  et ceci jusqu'à  $n + 1$  le cas échéant. Si cette place est aussi occupée, comme le parking est circulaire, la voiture essaye donc de se garer à la place 1. Comme il y a  $n$  voitures et  $n + 1$  places, toutes les voitures parviennent à se garer et de plus il reste à la fin une place de libre.

Le nombre de choix possibles pour les voitures est  $(n + 1)^n$  car chacune des  $n$  voitures choisit indépendamment une des  $n + 1$  places.

Supposons que la place  $n + 1$  soit libre. Nous allons montrer alors que le choix des places réalisé par les automobilistes est une fonction de Parking. En effet, prenons la  $i$  ème voiture. Elle a choisie la place  $p_i$ . Il faut montrer que cette voiture s'est bien garée dans la

première place de libre entre  $p_i$  et  $n$  et qu'une telle place existait. Si  $p_i$  était occupée alors elle a essayé de se garer en  $p_i + 1$  et ce jusqu'à  $n$ . Comme  $n + 1$  est libre cela veut dire que la voiture a réussi à se garer avant cette place.

Or il y a exactement le même nombre de fonctions ayant la place  $n + 1$  de libre que n'importe quelle autre place  $k$ . Il y a donc  $\frac{(n+1)^n}{n+1}$  fonctions de Parking.  $\square$

### Configurations récurrentes du graphe complet

Le graphe  $K_n$  est le graphe complet à  $n$  sommets.

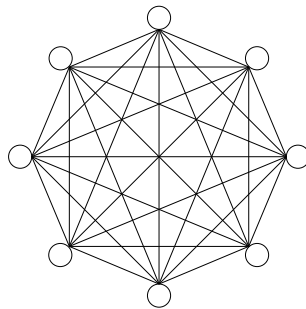


FIG. 1.5 – Graphe complet à 8 sommets  $K_8$

Les sommets sont numérotés  $0..n - 1$ . On choisira le sommet 0 pour le puits. Par la proposition 6 on a une caractérisation des configurations récurrentes. Soit  $u$  une configuration, on ajoute un grain sur tous les sommets puis on éboule la configuration obtenue.  $u$  est récurrente si et seulement si dans cette nouvelle configuration tous les sommets s'éboulent une unique fois.

Cette caractérisation nous permet d'énoncer le théorème suivant :

**Théorème 3.** *Les configurations récurrentes sur  $K_{n+1}$  sont en bijection avec les fonctions de Parking de longueur  $n$ . Si  $u = (u_1, \dots, u_n)$  est cette configuration alors  $(n - u_1, n - u_2, \dots, n - u_n)$  est de Parking. Ainsi le nombre de configurations récurrentes du graphe complet  $K_{n+1}$  est  $(n + 1)^{n-1}$ .*

*Démonstration.* Comme  $u$  est récurrente l'ajout d'un grain partout entraîne l'éboulement de tous les sommets du graphe une unique fois. Notons  $\sigma_1, \dots, \sigma_n$  un ordre d'éboulement possible pour les sommets. Cet ordre définit une permutation de  $\{1 \dots n\}$ .

À chaque fois qu'un sommet s'éboule, il a forcément au moins  $n$  grains de sable dessus. Si ce sommet s'éboule en  $k$  ième position, il en avait donc au plus  $n - 1 - k$  au début dans la configuration  $u$ .

Il est facile de vérifier que la fonction  $(n - u_1, n - u_2, \dots, n - u_n)$  est majorée par la permutation  $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ . Cela nous caractérise bien une fonction de Parking.  $\square$

Il est possible de généraliser ce résultat aux graphes bipartis complets comme cela est montré dans [CP00].



# Chapitre 2

## Le groupe du Tas de Sable

Ce chapitre est dédié à l'étude du groupe du Tas de Sable. Nous démontrerons dans un premier temps que les configurations récurrentes munies de l'opérateur  $\oplus$  forment un groupe abélien. Nous verrons ensuite une décomposition des groupes abéliens finis appelé forme de Smith et nous étudierons enfin la forme de ce groupe pour différentes familles de graphe.

### 2.1 Le groupe du Tas de Sable

Ce chapitre est basé essentiellement sur l'article de Dhar [DRSV95] introduisant ce concept de groupe et sur la thèse d'Olivier Marguin [Mar97] qui constitue une très bonne approche mathématique du sujet.

#### 2.1.1 Structure algébrique des états récurrents

Les résultats de la partie précédente tendent à munir l'ensemble des états récurrents d'une structure algébrique. En effet, si l'on considère cet ensemble muni de l'opérateur  $\oplus$  alors on peut montrer le théorème suivant :

**Théorème 4.** *L'ensemble des états récurrents sur un graphe  $G$  de puits  $x_n$  muni de l'opérateur  $\oplus$  forme un groupe abélien fini que l'on notera  $SP(G, x_n)$ , de plus*

$$SP(G) \simeq \mathbb{Z}^n / \Delta(G, x_n)$$

où  $\Delta(G, x_n) = \langle x_n, \Delta_1, \dots, \Delta_n \rangle$ .

*Démonstration.* – La loi  $\oplus$  sur l'ensemble des états récurrents est une loi interne par le corollaire 2.

– La loi  $\oplus$  est associative car :

$$\widehat{u + v + w} = \widehat{u + v} + w = u + \widehat{v + w}$$

– La loi  $\oplus$  est commutative

- Existence d'un élément neutre.

Nous noterons  $Id = \hat{\epsilon}$  définie après le lemme 2. Nous allons montrer que la configuration  $Id$  est l'élément neutre de notre groupe. Comme  $\epsilon \mathcal{R} 0$ , alors  $Id \mathcal{R} 0$ . Si  $u$  est une configuration récurrente alors  $u + Id$  appartient à la même classe d'équivalence que  $u + 0$  donc à la classe d'équivalence de  $u$ . Or  $u \oplus Id$  est récurrente par le corollaire 2 donc  $u \oplus Id = u$ .

- Existence d'un inverse.

En fait on a une propriété plus forte qui est la suivante. Soient  $u$  et  $v$  deux configurations récurrentes. Alors il existe une configuration récurrente  $w$  telle que  $u \oplus w = v$ . Cette propriété est évidente en terme de classes. En effet, comme  $v$  est récurrente alors il existe une configuration positive  $z$  telle que  $\widehat{\delta + z} = v$ . Or  $u < \delta$  donc il existe une configuration positive  $w'$  ( $\delta + z - u$ ) telle que  $\widehat{u + w'} = v$ . Soit  $w''$  la configuration récurrente telle que  $w' \mathcal{R} w''$  alors on a la même relation  $\widehat{u + w''} = v$  et  $w''$  est récurrente.

Muni de cette propriété l'existence d'un inverse est triviale. □

**Définition 8.** Nous noterons par  $\mathcal{G}$  ou  $SP(G, x_n)$  le groupe des états récurrents muni de l'opérateur  $\oplus$ .

### 2.1.2 Élément neutre et inverse

Nous allons donner ici une formulation explicite de l'élément neutre (identité) du groupe ainsi que de l'inverse d'un élément.

**Proposition 7.**

$$Id = \delta \oplus (\delta - (\delta \oplus \delta))$$

Soit  $u$  une configuration récurrente et soit  $v$  la configuration

$$Id \oplus (\delta - (\delta \oplus u))$$

alors  $v$  est l'opposé de  $u$ .

*Démonstration.* – La démonstration pour l'élément identité a été faite au paragraphe précédent.

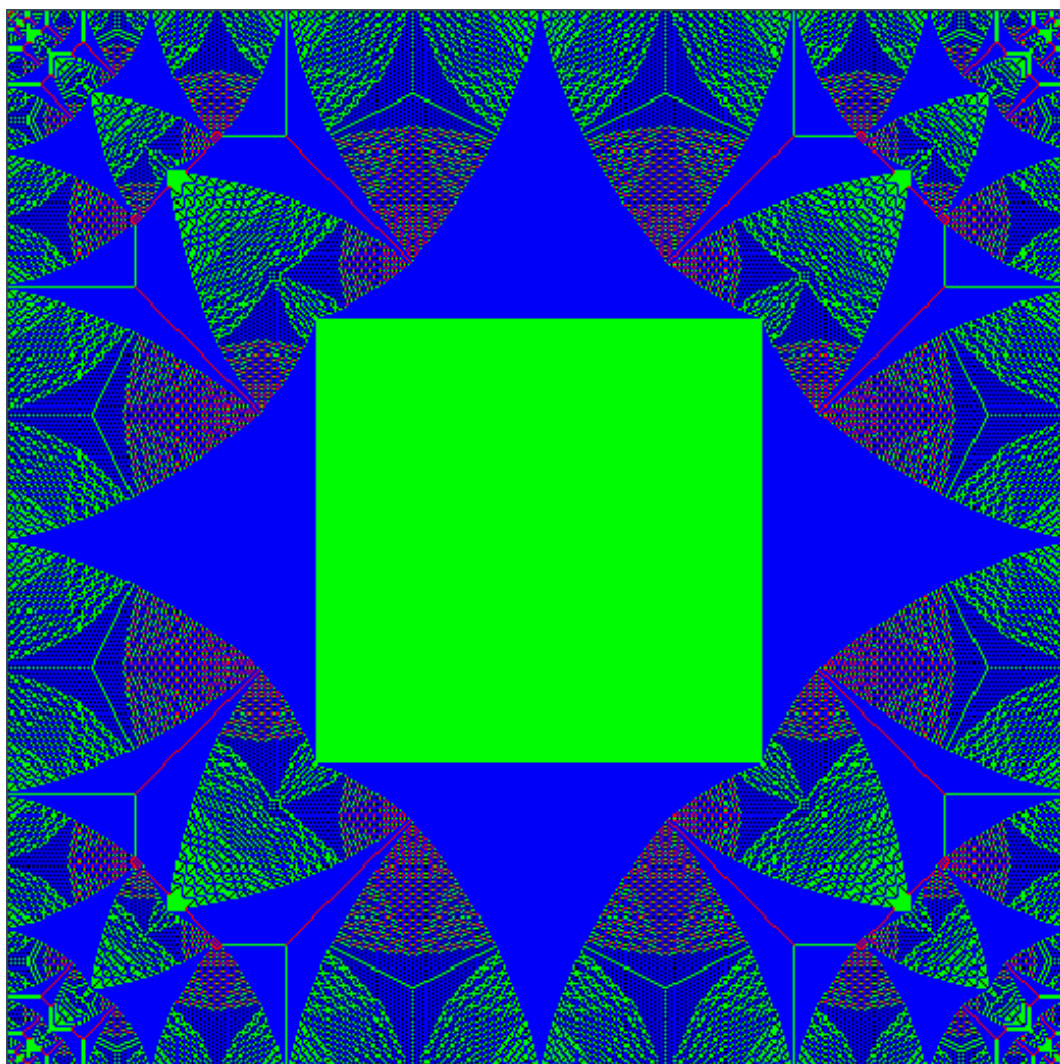
- La preuve pour l'opposé est triviale si l'on considère là encore la représentation par classe. En effet, par la remarque 4, on peut remplacer tous les opérateurs  $\oplus$  par l'opérateur  $+$  et la configuration résultante sera dans la même classe que la configuration initiale. Ainsi

$$u \oplus Id \oplus (\delta - (\delta \oplus u))$$

est dans la même classe que

$$u + Id + \delta - \delta - u = Id$$

Or  $u \oplus v$  est récurrente ainsi que  $Id$  donc  $v = Id$ . □

FIG. 2.1 – Identité sur la grille  $500 \times 500$ 

### 2.1.3 Rôle du puits

Nous allons montrer le résultat suivant :

**Théorème 5.** *Soit un graphe  $G$ , alors le groupe du Tas de Sable  $SP(G, x_n)$  est indépendant du choix du puits  $x_n$ . Nous noterons désormais ce groupe  $SP(G)$ .*

*Démonstration.* Notons  $E(i, j)$  le nombre d'arêtes reliant le sommet  $i$  au sommet  $j$ . Nous allons montrer que  $SP(G, x_1)$  est isomorphe à  $SP(G, x_n)$ . Le sous-groupe  $\Delta(G, x_n)$  a pour générateurs  $x_n, \Delta_i$ . ( $i = 1 \cdots n$ ) Il admet aussi comme générateurs les éléments  $x_n, \Delta'_1, \Delta'_2, \cdots, \Delta'_n$  où

$$\Delta'_i = \Delta_i + E(i, 1)x_n$$

Comme  $d_i = \sum_{j=1}^n e_{i,j}$  on peut réécrire  $\Delta'_i$  :

$$\Delta'_i = d_i(x_i - x_1) - \sum_{j=1}^n e_{i,j}(x_j - x_1) + e_{i,1}x_n$$

En posant  $y_1 = -x_n$ ,  $y_2 = x_2 - x_1$ ,  $y_3 = x_3 - x_1, \dots, y_n = x_n - x_1$ , les éléments  $y_i$  sont des générateurs de  $\mathbb{Z}^n$ . Exprimés dans cette base, on peut écrire  $\Delta'_i$  de la manière suivante :

$$\Delta'_i = d_i y_i - \sum_{j=2}^n e_{i,j} - e_{i,1} y_1$$

Or cela est exactement la définition de  $\Delta_i$  où  $x_i$  est remplacé par  $y_i$ . Ainsi,

$$\Delta(G, x_n) = \langle y_1, \Delta'_2, \dots, \Delta'_n \rangle$$

est isomorphe à  $\Delta(G, x_1)$ . □

## 2.2 Cardinal du groupe

### 2.2.1 Arbres couvrants du graphe

#### Configurations récurrentes et arbres recouvrants

Dhar [DRSV95] montre que le nombre d'états récurrents est égal au déterminant de la matrice  $\Delta$  définie par :

$$\begin{cases} \Delta_{ii} = d_i \\ \Delta_{ij} = -E(i, j) \end{cases}$$

Une preuve simple de ce résultat peut être énoncé en considérant la bijection suivante entre les états récurrents et les arbres couvrants du graphe. (voir Majumdhara et Dhar)

Pour décrire la bijection, rappelons que pour toute configuration récurrente  $u$  on a la relation  $u + \beta \xrightarrow{*} u$  et que dans cette avalanche chaque sommet du graphe s'éboule une et une seule fois.

Pour chaque sommet  $i$  les arêtes  $(i, j)$  incidentes à ce sommet sont classées dans une liste  $L_i$ . Le sommet 0 est le puits.

- $X_0 = \{0\}$ ,  $u^{(0)} = u + \beta$
- $X_k = \{i \mid u_i^{(k-1)} \geq d_i\}$ ,  $u^{(k)} = \Delta_{X_k}(u^{(k-1)})$  où  $\Delta_X$  est la composition de tous les  $\Delta_j$  pour  $j \in X$ ,  $L_i^{(k)}$  est la restriction de la liste  $L_i^{(k)}$  aux arêtes ayant une extrémité dans  $X_{k-1}$ .

Soit maintenant un ensemble  $X_k$ . Pour chaque sommet de cet ensemble, on sélectionne la  $(u_i^{(k-1)} - d_i + 1)^{\text{ème}}$  arête de la liste  $L_i^{(k)}$ .

L'ensemble des arêtes ainsi sélectionnées forment un arbre recouvrant du graphe.

**Théorème 6.** *L'algorithme précédent définit une bijection entre les arbres recouvrants du graphe et les états récurrents*

*Démonstration.* Comme chaque sommet ne s'éboule qu'une seule fois dans l'avalanche, les sous-ensembles  $X_k$  forment une partition de l'ensemble des sommets du graphe.

Soient 2 configurations récurrentes  $u$  et  $u'$  telles que l'arbre recouvrant induit par  $u$  soit le même que celui induit par  $u'$ . Alors numérotions les sommets du graphe par rapport à leur distance au puits. Un sommet numéroté par  $k$  appartient à  $X_k$ . Ainsi, comme les arbres recouvrants sont égaux, cela implique que  $X_k = X'_k$  pour tout  $k$ . Par suite on a l'égalité suivante :

$$L_i^{(k)} = L_i^{(k)'}$$

comme on a l'égalité des listes  $L$  et des ensembles  $X_k$ , du fait du choix d'une arête entre  $i$  et  $j$  qui ne dépend que du nombre de grains sur le sommet  $i$  ou  $j$ , on a égalité de ce nombre pour  $u$  et  $u'$ . Ainsi, on a  $u = u'$ .

L'algorithme précédent définit donc une injection de  $\mathcal{R}$  dans l'ensemble des arbres recouvrants du graphe.

Montrons maintenant que c'est une surjection. Soit un arbre recouvrant  $\mathcal{T}$ . On numérote les sommets du graphe par rapport à leur distance au puits dans l'arbre recouvrant. On va définir les ensembles  $X_k$  par l'ensemble des sommets numérotés par  $k$ . Pour  $i \in X_k$  on définit  $L_i^{(k)}$  par la restriction de  $L_i$  aux arêtes ayant pour sommet de départ  $i$  et pour sommet d'arrivée un sommet de  $X_{k-1}$ .

On définit la configuration  $u$  par

$$u_i = 3 - d_i + \alpha$$

$$\alpha = |\{j, E(i, j) > 0 \text{ et } j \in \bigcup_{l=0}^{\beta} X_l\}|$$

$\beta$  est tel que  $i \in X_\beta$ .

Il est facile de vérifier que cette configuration est récurrente et produit l'arbre recouvrant par l'algorithme précédent.  $\square$

Le *matrix-tree* théorème ([WVL92]) permet de relier la matrice précédemment définie au nombre d'arbres recouvrants du graphe. Le déterminant de la matrice  $\Delta$  est égal au nombre d'arbres recouvrants du graphe sous-jacent.

### Exemple d'obtention d'arbre recouvrant

Prenons l'exemple de la grille  $4 \times 4$  et de la configuration récurrente suivante :

3	2	1	0
0	1	2	3
2	2	3	3
3	3	2	2

Les case du tableau sont numérotés a partir d'en bas à gauche. Les ensembles  $X_i$  sont définis par :

$$X_0 = \{0\}$$

5	3	2	2
1	1	2	4
3	2	3	4
5	4	3	4

$$X_1 = \{(1, 1), (1, 4), (2, 1), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$$

1	4	2	3
2	1	3	1
4	3	4	2
2	1	5	1

$$X_2 = \{(1, 2), (2, 4), (3, 1), (3, 2)\}$$

2	0	3	3
3	2	4	1
0	5	1	3
3	2	2	2

$$X_3 = \{(2, 2), (3, 3)\}$$

2	0	4	3
3	4	0	2
1	1	3	3
3	3	2	2

$$X_4 = \{(2, 3), (3, 4)\}$$

2	2	0	4
4	0	2	2
1	2	3	3
3	3	2	2

$$X_5 = \{(1, 3), (4, 4)\}$$

3	2	1	0
0	1	2	3
2	2	3	3
3	3	2	2

Pour le choix d'orientation haut, gauche, bas, droite, l'arbre recouvrant associé est donc :

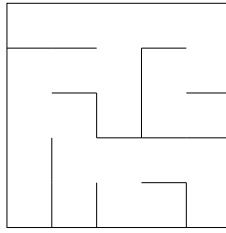
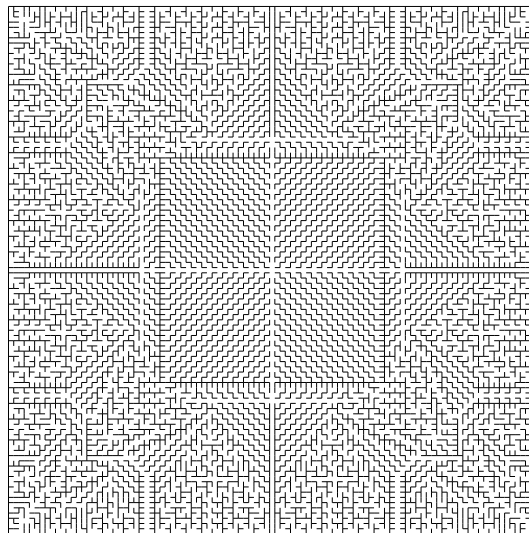


FIG. 2.2 – Arbre recouvrant du graphe

Considérons maintenant l'identité sur la grille  $100 \times 100$  et regardons l'arbre recouvrant associé :



### 2.2.2 Exemples

#### Graphe de Petersen

#### Le graphe de Petersen ou le graphe de l'an 2000

Le graphe de Petersen est défini comme suit :

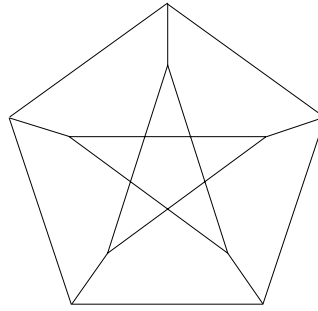


FIG. 2.3 – Graphe de Petersen

La matrice associée à ce graphe est :

$$M = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Le déterminant de cette matrice est 2000. Ainsi il y a 2000 configurations récurrentes et 2000 arbres couvrants pour ce graphe.

# Chapitre 3

## Structure du groupe

### 3.1 Forme de Smith

#### 3.1.1 Définition

Nous avons vu que l'on pouvait munir l'ensemble des états récurrents d'une structure de groupe abélien fini. Or on peut montrer que tout groupe abélien fini peut se décomposer comme la somme directe de sous groupes cycliques :

**Théorème 7.** *Soit  $G$  un groupe abélien fini. Alors il existe des entiers positifs  $d_1, \dots, d_n$  (appelés diviseurs élémentaires de  $G$ ) vérifiant :*

1. Pour tout  $i \in \{1 \dots n\}, d_{i+1} | d_i$
2. On a l'isomorphisme de groupe :

$$G \simeq \bigoplus_{1 \leq i \leq n} (\mathbb{Z}/d_i\mathbb{Z})$$

*De plus cette décomposition est unique.*

#### 3.1.2 Représentation des matrices

Dans notre cas nous considérons la matrice  $M$  associée à un graphe  $G = (V, E)$  telle que  $M_{i,i} = d_i$  le degré du sommet  $i$  et  $M_{i,j} = -e_{i,j}$  le nombre d'arêtes reliant  $i$  à  $j$  dont on a supprimé la ligne  $i$  et la colonne  $i$  qui représente le choix du puits.

Remarquons en premier lieu que dans le cas d'un graphe planaire cette matrice est creuse tandis que dans le cas du graphe complet cette matrice ne contient aucun 0.

Ces deux types possibles de matrice demanderont différents traitements. Il paraît normal qu'une matrice creuse soit plus facilement mise sous la forme de Smith qu'une matrice pleine. Nous allons donc dans la suite de ce chapitre donner des méthodes qui nous semblent efficaces dans le but de calculer la forme de Smith d'un graphe donné.

Cette discussion est plus une mise en application et une compilation de différents articles sur le sujet. La majorité des algorithmes mis en jeu sont tirés du livre de référence de Cohen [Coh93].

### 3.1.3 Première phase d'élimination

Nous allons dans un premier tenter d'éliminer récursivement les sommets de degré 1 du graphe. Pour un tel sommet  $i$  relié au sommet  $j$  la ligne  $M_i$  de la matrice est  $M_{i,i} = 1$  et  $M_{i,j} = -1$  sinon  $M_{i,k} = 0$ . Nous allons donc ajouter la colonne  $i$  à la colonne  $j$ . Nous obtenons une nouvelle matrice  $M'$  avec  $M'_{i,j} = 0$   $M'_{j,j} = M_{j,j} - 1$  sinon  $M'_{k,l} = M_{k,l}$ .

Dans cette nouvelle matrice, la ligne  $i$  ne contient plus qu'un seul 1 à la colonne  $i$ . En additionnant cette ligne à la ligne  $j$ , on obtient une nouvelle matrice  $M''$  telle que  $M''_{k,l} = M'_{k,l}$  sauf pour  $M''_{j,i} = 0$ . Ainsi, la ligne et la colonne  $i$  ne contiennent qu'un seul coefficient en  $M''_{i,i} = 1$ .

Cela nous permet d'éliminer la ligne et la colonne  $i$ . Remarquons que la matrice obtenue ensuite est la matrice correspondant au graphe  $G' = (V', E')$  avec  $V' = V \setminus i$  et  $E' = E|_{V'}$ .

Cela veut dire que les sommets de degré 1 peuvent donc être éliminés de manière séquentielle jusqu'à obtention d'un graphe 2-connexe.

**Remarque 6.** *Dans le cas du chemin, on retrouve le fait qu'il n'y a qu'une unique configuration récurrente.*

## 3.2 Forme de Smith générale

### 3.2.1 Calcul du déterminant

Pour un calcul efficace de manière modulaire de la forme de Smith, il est nécessaire de connaître le déterminant de la matrice.

Je présente ci-dessous deux méthodes pour ce calcul : le choix de l'une ou de l'autre dépendra du graphe considéré.

#### Le calcul par reste chinois

Ce type de méthode est fréquemment utilisé lors de calcul sur des entiers de taille importante (plusieurs dizaines voir centaines de chiffres). Il est basé sur la connaissance d'un bon majorant de la quantité à calculer. Dans notre cas, c'est à dire le calcul d'un déterminant, la première idée est de considérer la borne d'Hadamard

**Proposition 8.** *Si  $M = (M_{i,j})$  est un matrice carrée à coefficients entiers alors :*

$$|\det(M)| \leq \prod_{1 \leq i \leq n} \left( \sum_{1 \leq j \leq n} |M_{i,j}|^2 \right)$$

Néanmoins il s'avère que cette borne est bien trop large dans notre cas. En effet, le déterminant de notre matrice est le nombre de configurations récurrentes sur le graphe  $G$ . Or ce nombre est majoré bien évidemment par le nombre de configurations stables sur le graphe. Nous obtenons ainsi la proposition suivante :

**Proposition 9.** Soit  $G$  un graphe et  $M$  sa matrice associée. Alors :

$$|\det(M)| \leq \prod_{i=1}^n d_i$$

Muni de cette borne  $R$ , on cherche une liste  $p_i$  de nombres premiers entre eux deux à deux tels que  $\prod p_i \geq 2R$ .

Cette partie est généralement réalisé à l'aide d'un fichier précalculé des nombres premiers. Pour  $p_i$  on utilise des nombres de la forme  $p^j$  où  $p$  est premier. L'idée est de prendre un nombre premier de la taille du plus grand mot machine possible. (32 ou 64 bits selon les architectures). Cela permet en effet de stocker chaque élément de la matrice dans un mot mémoire et les calculs se font donc en un nombre de cycles réduit.

Finalement on calcule le déterminant de la matrice  $M^{(p_i)}$  modulo  $p_i$ .

$$M_{i,j}^{(p_i)} = M_{i,j}^{(p_i)}[\text{mod } p_i]$$

Ce calcul peut être effectué à l'aide de l'algorithme de Gauss-Bareiss ([Coh93] p.51) de la manière suivante :

Entrée :

$p_i$  : entier  $M$  : matrice  $n \times n$  de coefficients dans  $\mathbb{Z}/p_i\mathbb{Z}$

Sortie :  $\det(M)$  modulo  $p_i$

Variables auxiliaires :

$k, c, s$  : entiers

Attention : Le renvoi d'une valeur sort de l'algorithme

- $k := 0, c := 1, s := 1$
- Tant que  $k < n - 1$ 
  - $p := m_{k,k}$
  - Si  $p == 0$  faire
    - Si  $m_{i,k} == 0$  pour tout  $i$  alors renvoyer 0
    - Sinon trouver  $k$  tel que  $m_{i,k} \neq 0$
    - Pour  $j := k, \dots, n - 1$  échanger  $m_{i,j}$  et  $m_{k,j}$
    - $s := -s, p := m_{k,k}$ .
  - Pour  $i := k + 1, \dots, n - 1$  et pour  $j := k + 1, \dots, n$  faire
    - $t := pm_{i,j} - m_{i,k}m_{k,j}$ .  $m_{i,j} := t/c[\text{mod } p_i]$  (division exacte).  $c := p$
- $k := k + 1$

On obtient ainsi le déterminant  $h_i$  de la matrice modulo chaque terme  $p_i$  de la suite  $(p_i)_{1 \leq i \leq k}$ . Il reste ensuite à reconstruire la valeur exacte du déterminant à l'aide du théorème du reste chinois :

- $i := 1, m := p_1, x := h_1$
- Tant que  $i < k$  faire
  - $i := i + 1$ . Calculer  $u, v$  tels que  $um + vp_i = 1$
  - $x := umh_i + vp_ix$ .  $m := mp_i$ .  $x := x[\text{mod } m]$

### Calcul direct

Une deuxième méthode consiste à calculer directement le déterminant de la matrice  $M$ . Pour cela il suffit de reprendre l'algorithme précédent de calcul de déterminant mais en éliminant les différents modulo de l'algorithme.

Le choix de la méthode dépend essentiellement de la qualité de la borne. Si la borne demande le calcul du déterminant modulaire avec un grand nombre d'entiers alors la deuxième méthode peut se révéler profitable sinon la première reste en général la plus pratique et la plus rapide.

### 3.2.2 Calcul de la forme de Smith

De nombreux articles récents traitent du calcul de la forme de Smith d'une matrice connaissant son déterminant ou un multiple du déterminant. [SM98], [SL96],[Sto96b],[Sto96a],[Sto98]. Nous nous appuierons ici sur un article de Hafner et Mc Curley [HM91].

Dans l'algorithme suivant, les modulo  $R$  sont pris dans  $[-R/2, R/2]$ . De plus lors de l'algorithme d'Euclide étendu pour  $a, b$  donné, on cherche  $(u, v, d)$  tels que  $ua + vb = d = \text{pgcd}(a, b)$ , et :

$$-|a|/d < v \text{sign}(b) \leq 0 \text{ et } 1 \leq u \text{sign}(a) \leq |b|/d$$

. Les données de l'algorithme sont les suivantes :

Le renvoi d'une valeur ne sort pas de l'algorithme  
 $B$  est un vecteur colonne auxiliaire  
 $B'$  un vecteur ligne  
 $M_i$  représente le vecteur colonne  $i$   
 $M'_i$  représente le vecteur ligne  $i$

**Algorithme**

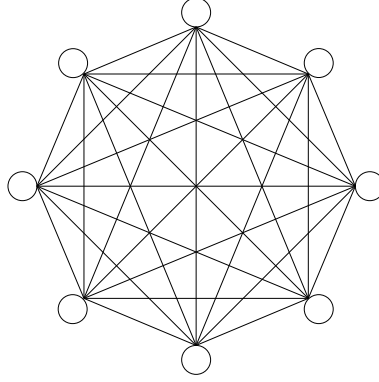
$i := n - 1$ ,  $R := |\det(M)|$ . Si  $n == 1$  renvoyer  $R$  et sortir.  
 Répéter indéfiniment  
 – Faire  
   –  $j := i$ ,  $c := 0$ .  
   – Tant que  $j \neq 0$  faire  
     –  $j := j - 1$ . Si  $M_{i,j} \neq 0$  faire  
       – Calculer  $(u, v, d)$  tels que  
         
$$uM_{i,i} + vM_{i,j} = d = \text{pgcd}(M_{i,i}, M_{i,j})$$
  
       –  $B := uM_i + vM_j$ ,  $M_j := ((M_{i,j}/d)M_j - (M_{i,j}/d)M_i)[\text{mod}R]$ ,  $M_i := B[\text{mod}R]$ .  
     –  $j := i$   
     – Tant que  $j \neq 0$  faire  
       –  $j := j - 1$ . Si  $M_{j,i} \neq 0$  faire  
         – Calculer  $(u, v, d)$  par Euclide tels que  $uM_{i,i} + vM_{j,i} = d = \text{pgcd}(M_{i,i}, M_{j,i})$ .  
         –  $B' := uM'_i + vM'_j$ ,  $M'_j := ((M_{i,i}/d)M'_j - (M_{j,i}/d)M'_i)[\text{mod}R]$ .  $M'_i := B'[\text{mod}R]$ .  $c := c + 1$   
     – Tant que  $c > 0$   
     –  $b := M_{i,i}$ . Vérifier que les coefficients  $M_{k,l}$  avec  $0 \leq k, l < i$  soient divisibles par  $b$ .  
     – Si oui, renvoyer  $d_i = \text{pgcd}(M_{i,i}, R)$  et faire  $R := R/d_i$ . De plus si  $i = 1$  renvoyer  $d_1 = \text{pgcd}(M_{1,1}, R)$  et sortir. Sinon faire  $i := i - 1$   
     – Si non, prendre  $k, l$  tels que  $M_{k,l}$  soit non divisible. Faire  $M'_i := M'_i + M'_k$ .

### 3.3 Exemple de décomposition de Smith

Cette partie est un catalogue de décompositions du groupe du Tas de Sable sur certaines familles connues de graphes telles les roues ou les graphes bipartis complets.

#### 3.3.1 Le graphe complet

Le graphe complet  $K_n$  est un graphe à  $n$  sommets où chaque sommet est relié à tous les autres. (voir figure 3.1)

FIG. 3.1 – Graphe complet  $K_8$ 

Dans le graphe complet les configurations  $\Delta_i$  pour  $i \in \{1..n-1\}$  sont données par :

$$(n-1)x_i - (x_1 + \dots + x_{i-1} + x_{i+1} + \dots + x_n)$$

La somme de toutes ces relations et de  $n$  fois  $x_n$  nous donne la nouvelle relation  $\Delta'_{n-1}$

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n$$

Remplaçons la relation  $\Delta_{n-1}$  par  $\Delta'_{n-1}$  et les autres relations  $\Delta_i$  par  $\Delta'_i = \Delta_i + \Delta'_{n-1}$ . Cela nous donne  $\Delta'_i = nx_i$  pour  $i \in \{1..n-2\}$ .

Nous obtenons donc la décomposition suivante :

**Théorème 8.** *Le groupe du Tas de Sable pour le graphe complet  $K_n$  est le produit direct de  $n-2$  groupes cycliques d'ordre  $n$*

### 3.3.2 La roue

La roue notée  $R_n$  est un graphe à  $n+1$  sommets numérotés de 1 à  $n+1$ . Le sommet  $n+1$  est de degré  $n$  et est relié à tous les autres sommets tandis que les autres sommets sont de degré 3. Ainsi le sommet  $i \neq n$  est relié au sommet  $n+1$ , au sommet  $i+1[\text{mod}n]$  et au sommet  $i-1[\text{mod}n]$ .

Les relations  $\Delta_i$  pour la roue sont données pour  $i = 2, \dots, n-1$  par :

$$\Delta_i = 3x_i - x_{i+1} - x_{i-1} - x_{n+1}$$

et

$$\Delta_1 = 3x_1 - x_2 - x_n - x_{n+1}, \quad \Delta_n = 3x_n - x_1 - x_{n-1} - x_{n+1}$$

Nous travaillons maintenant dans le quotient  $\mathbb{Z}^{n+1}/\Delta(G, x_n+1)$ . Dans ce quotient nous avons les relations  $\bar{x}_i = 3\bar{x}_{i-1} - \bar{x}_{i-2}$  pour  $i$  allant de 3 à  $n$ . Nous pouvons donc exprimer  $\bar{x}_i$  en fonction de  $\bar{x}_1$  et de  $\bar{x}_2$  par la formule suivante :

$$\bar{x}_i = \alpha_i \bar{x}_2 + \alpha_{i-1} \bar{x}_1$$

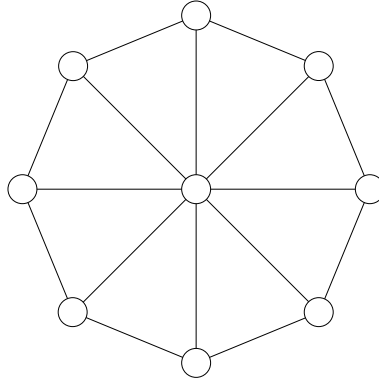


FIG. 3.2 – Roue à 8 sommets

où  $(\alpha_i)$  est une suite définie par :

$$\alpha_2 = 1, \alpha_3 = 1, \alpha_i = 3\alpha_{i-1} - \alpha_{i-2}$$

Nous avons en outre les deux relations suivantes :

$$\bar{x}_1 = \alpha_{n+1}\bar{x}_2 + \alpha_n\bar{x}_1 \quad \bar{x}_2 = \alpha_{n+2}\bar{x}_2 + \alpha_n\bar{x}_1$$

Il est facile de vérifier que la suite  $\alpha_i$  est en réalité la suite des termes pairs de la suite de Fibonacci  $f_n$  définie par  $f_{n+2} = f_n + f_{n+1}$  avec  $f_1 = f_2 = 1$ .

$$\alpha_n = f_{2n-2}$$

Les relations entre  $\bar{x}_1$  et  $\bar{x}_2$  deviennent alors :

$$\begin{cases} f_{2n}\bar{x}_2 & -(f_{2n-2} + 1)\bar{x}_1 = 0 \\ (f_{2n+2} - 1)\bar{x}_2 & -f_{2n}\bar{x}_1 = 0 \end{cases}$$

Nous obtenons ainsi la décomposition suivante :

**Théorème 9.** *Le groupe du Tas de Sable de la roue  $R_n$  est le produit direct de deux groupes cycliques. Si  $n$  est pair, ces deux groupes sont d'ordre  $5f_n$  et  $f_n$ , et si  $n$  est impair ils sont les deux d'ordre  $f_{n-1} + f_{n+1}$ .*

*Démonstration.* Nous devons trouver la forme normale de Smith de la matrice suivante :

$$M_n = \begin{pmatrix} f_{2n} & -(f_{2n-2} + 1) \\ f_{2n+2} - 1 & -f_{2n} \end{pmatrix}$$

Pour cela nous utilisons deux identités classiques sur les suites de Fibonacci (voir [GKP89] pour plus de détails)

$$f_{2n} = f_n(f_{n-1} + f_{n+1})$$

et l'identité de Cassini

$$f_n f_{n-3} = f_{n-1} f_{n-2} + (-1)^n$$

Cela nous donne :

$$f_{2n+2} - 1 = \begin{cases} f_n f_{n+1} + f_n f_{n+3} & \text{Si } n \text{ est pair} \\ f_{n+1} f_{n+2} + f_{n-1} f_{n+2} & \text{Si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

et

$$f_{2n-2} + 1 = \begin{cases} f_n f_{n-1} + f_n f_{n-3} & \text{Si } n \text{ est pair} \\ f_{n+1} f_{n-2} + f_{n-1} f_{n-2} & \text{Si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Pour  $n$  impair nous avons :

$$M_n = \begin{pmatrix} f_{n-1} + f_{n+1} & 0 \\ 0 & f_{n-1} + f_{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_n & f_{n-2} \\ f_{n+2} & f_n \end{pmatrix}$$

Remarquons que par l'identité de Cassini, la deuxième matrice a pour déterminant 1 :

$$\begin{vmatrix} f_n & f_{n-2} \\ f_{n+2} & f_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_n & f_{n-2} \\ f_{n+1} & f_{n-1} \end{vmatrix}$$

Pour  $n$  pair, nous cherchons la forme de Smith de la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} f_n(f_{n+1} + f_{n-1}) & f_n(f_{n-1} + f_{n-3}) \\ f_n(f_{n+1} + f_{n+3}) & f_n(f_{n+1} + f_{n-1}) \end{pmatrix}$$

Par addition de la deuxième ligne à la première on obtient :

$$M'_n = \begin{pmatrix} f_n(2f_{n+1} + f_{n-1} + f_{n+3}) & f_n(2f_{n-1} + f_{n+1} + f_{n-3}) \\ f_n(f_{n+1} + f_{n+3}) & f_n(f_{n+1} + f_{n-1}) \end{pmatrix}$$

qui se décompose en :

$$M'_n = \begin{pmatrix} 5f_n & 0 \\ 0 & f_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{n+1} & f_{n-1} \\ f_{n+1} + f_{n+3} & f_{n+1} + f_{n-1} \end{pmatrix}$$

Mais :

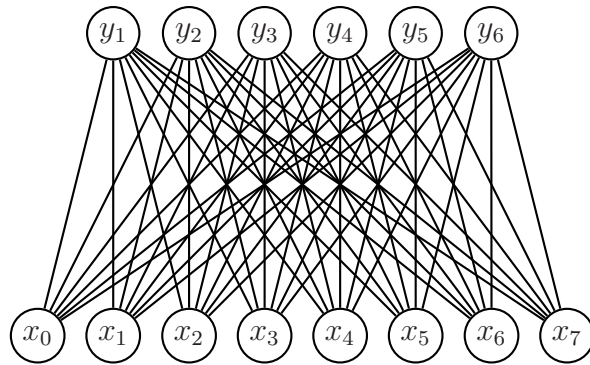
$$\begin{vmatrix} f_{n+1} & f_{n-1} \\ f_{n+3} & f_{n+1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_n & f_{n-1} \\ f_{n+2} & f_{n-1} \end{vmatrix}$$

qui est égal à 1 par l'identité de Cassini.

□

### 3.3.3 Le graphe biparti complet

Nous appellerons  $K_{n,p}$  le graphe biparti complet à  $n+p$  sommets numérotés  $x_1, \dots, x_n$  et  $y_1, \dots, y_p$  tel que chaque sommet  $x_i$  soit relié à tous les sommets  $y_j$ . (cf figure 3.3)

FIG. 3.3 – Graphe  $K_{8,6}$ 

Les relations  $\Delta'_i$  pour  $i = 1 \cdots p - 1$  et  $\Delta''_i$  pour  $i = 1 \cdots n$  s'écrivent :

$$\Delta'_i = ny_i - (x_1 + \cdots + x_n)$$

$$\Delta''_i = px_i - (y_1 + \cdots + y_p)$$

Le calcul de la forme de Smith de ces relations nous donne la décomposition suivante :

**Théorème 10.** *Le groupe du Tas de Sable du graphe biparti complet  $K_{n,p}$  ( $n \geq p$ ) est le produit direct de  $(p - 2)$  groupes cycliques d'ordre  $\text{pgcd}(n, p)$ ,  $(p - 2)$  groupes d'ordre  $\text{ppcm}(n, p)$ ,  $(n - p)$  groupes d'ordre  $p$  et 1 d'ordre  $np$ .*

*Démonstration.* Plaçons nous dans le groupe quotient  $SP(K_{n,p})$ . Remplaçons la relation  $\Delta''_n$  par la somme de toutes les relations pour obtenir :

$$\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \cdots + \bar{x}_n = 0$$

Soustrayons cette relation à chacune des relations  $\Delta'_i$ . Nous obtenons maintenant pour les  $\Delta'_i$  le système suivant :

$$\begin{cases} n\bar{y}_i = 0 & i = 1 \cdots p - 1 \end{cases}$$

Soustrayons maintenant  $\Delta''_1$  à tous les  $\Delta''_i$  pour  $i = 2, \dots, n - 1$ . On obtient alors le système suivant :

$$\begin{cases} p\bar{x}_1 - (\bar{y}_1 + \bar{y}_2 + \cdots + \bar{y}_{p-1}) = 0 \\ p(\bar{x}_i - \bar{x}_1) = 0 \\ \bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \cdots + \bar{x}_n = 0 \end{cases} \quad i = 2 \cdots n - 1$$

La relation  $n\bar{y}_{p-1} = 0$  peut être remplacée par :

$$n(p\bar{x}_1 - \bar{y}_1 - \cdots - \bar{y}_{n-2})$$

Or  $n\bar{y}_i = 0$  donc on obtient finalement la relation  $np\bar{x}_1 = 0$ . Prenons maintenant comme générateurs les  $2n - 1$  éléments suivants :

$$x_1, x_2 - x_1, \dots, x_{n-1} - x_1, y_1, \dots, y_{p-2}, x_1 + \cdots + x_n, px_1 - y_1 - \cdots - y_{p-1}$$

Il est facile de vérifier que ces éléments sont indépendants et que leur ordre est  $np$  pour le premier,  $p$  pour les  $n - 2$  suivants,  $n$  pour les  $p - 2$  suivants et 1 pour les deux derniers. Pour conclure, il suffit de remarquer qu'avec un générateur d'ordre  $n$  et d'un d'ordre  $p$  on a construit un d'ordre  $\text{pgcd}(n, p)$  et un d'ordre  $\text{ppcm}(n, p)$ .

□

### 3.3.4 Étude de la grille

Cette étude a été réalisée dans l'article [DRSV95] mais il apparaît que la preuve contient certaines difficultés de compréhension qui peuvent être très facilement levés à l'aide de résultats d'algèbre simples.

Nous reprenons donc ici partiellement cette démonstration qui permet en outre de simplifier le calcul effectif de la forme de Smith sur les grilles carrées et rectangulaires.

Chaque case de la grille est repérée par ses coordonnées  $(x, y)$ . La grille est de taille  $L_1$  par  $L_2$  et nous supposons sans perte de généralités que  $L_1 \geq L_2$ . Les relations  $\Delta_{x,y}$  s'écrivent alors :

$$\Delta_{x,y} : 4u_{x,y} - u_{x+1,y} - u_{x-1,y} - u_{x,y+1} - u_{x,y-1} = 0 \quad (3.1)$$

Nous prendrons par convention ici que

$$u_{x,0} = u_{x,L_2+1} = u_{0,y} = u_{L_1+1,y} = 0$$

ce qui correspond à travailler dans le groupe quotient  $SP(G, \text{puits})$ .

L'équation 3.1 peut se réécrire comme :

$$u_{x+1,y} = 4u_{x,y} - u_{x-1,y} - u_{x,y+1} - u_{x,y-1}$$

Cette équation permet d'exprimer le terme  $u_{x,y}$  en fonction des termes  $u_{1,y}$ . Ainsi, on montre que le groupe est complètement engendré par les éléments  $u_{1,y}$ . Ainsi, la forme de Smith du groupe comportera au plus  $L_2$  sous-groupes cycliques.

De plus, on remarque que pour calculer effectivement la décomposition du groupe, il suffit de considérer la matrice  $L_2 \times L_2$  constituée par l'écriture en colonne des relations  $u_{L_1+1,y}$  en fonction des générateurs  $u_{1,y'}$ . Nous donnons ci-contre un algorithme permettant de générer cette matrice.

**Précalcul de la matrice réduite pour la forme de  
Smith des grilles**

**Entrée :** Deux entiers  $L_1$  et  $L_2$  avec  $L_2 < L_1$

**Sortie :** Une matrice  $M = (M_{i,j})$  de taille  $L_2 \times L_2$

Soient  $M_0, M_1$  et  $M_2$  trois matrices de tailles  $p+2 \times p+2$ .  $M_0 = (0)$ ,  $M_1 = (M_1[i, j])$  tel que  $M_1[i, j] = 1$  si  $0 < i = j < p + 1$  sinon  $M_1[i, j] = 0$ .  $M[i]$  représente la colonne  $i$  de la matrice  $M$ .

Répéter  $L_2$  fois :

– Pour  $i$  de 1 à  $p$  faire :

$$- M_2[i] = 4M_1[i] - M_1[i - 1] - M_1[i + 1] - M_0[i]$$

$$- M_0 = M_1$$

$$- M_1 = M_2$$

Retourner  $M_1$ .

La forme générale de ces coefficients dans le cas  $L_2 = 2$  est traité dans l'article de Dhar [DRSV95]. On retrouve les termes pairs de la suite de Fibonacci comme dans le cas de la roue.

Nous restreignons maintenant notre discussion au cas particulier de la grille carrée de taille  $L \times L$  et nous allons montrer le théorème suivant :

**Théorème 11.** *Le groupe du Tas de sable sur la grille carrée de taille  $L \times L$  se décompose en un produit de  $L$  sous-groupes cycliques.*

*Démonstration.* Nous savons déjà par ce qui précède qu'il y a au plus  $L$  groupes dans la décomposition.

Reprenons les vecteurs  $n_k(x, y)$  introduits par Dhar.

$$n_k(x, y) = (-1)^x (\delta(y - x - k) - \delta(y + x - k) - \delta(x + y - 2L - 2 + k) + \delta(y - x + k))$$

où  $\delta$  est telle que  $\delta(x) = 1$  en  $x = 0$  sinon  $\delta(x) = 0$ . De plus  $1 \leq x, y \leq L, 0 \leq k \leq L - 1$ .

					1	-1			
				-1			1		
			1					-1	
			-1						1
	1								-1
-1									
									1
	1								-1
	-1							1	
		1					-1		
			-1			1			
				1	-1				

FIG. 3.4 – Configuration  $n_5(x, y)$  sur une grille  $12 \times 12$

Il est facile de vérifier sur cette figure que les vecteurs  $n_k(x, y)$  sont vecteurs propres de la matrice  $\Delta$  pour la valeur propre 4. Il suffit de remarquer que

$$4n_k(x, y) - n_k(x + 1, y) - n_k(x - 1, y) - n_k(x, y + 1) - n_k(x, y - 1) = 4n_k(x, y)$$

De plus ces  $L$  vecteurs sont trivialement linéairement indépendants. La fin de la démonstration provient directement d'un article de Rushanan [Rus95], où il est démontré que si on a une valeur propre entière dont le sous-espace propre est de dimension  $k$  alors il y a un produit d'au moins  $k$  groupes cycliques dans la décomposition de Smith de ce groupe.

□

**Remarque 7.** *Dans le cas des grilles rectangulaires le même argument conduit à une minoration du nombre de groupes par  $\text{pgcd}(L_1, L_2)$ .*

Il est ainsi possible de calculer la forme de Smith pour des grilles de grandes tailles. Nous donnons quelques exemples ci-après.

50 × 50		
Numéro	Nombre	Cardinal
$d_1$	26	8
$d_{27}$	14	83224
$d_{41}$	2	3260532442480904
$d_{43}$	2	55429051522175368
$d_{45}$	2	72792257340548324201368
$d_{47}$	2	12184421525267921057861591793186097641214168
$d_{49}$	1	4326987191929400109086867268433342406153723415 8614692282751838024669015798778329616289616308 0240440999801846789381523522648256078214881558 8532233278803720158347929568687895433812016474 9012231679750408288404242351551874138365997241 6620084118060765096575945080755170358698230521 0973798123858438575005691691544371002508515510 8639861466455648839591700923538425947994669794 5834734774360884680175038720326928290782970404 7156511489987058351927083791529932943383720824 7355760691790398992427046337283736
$d_{50}$	1	2206763467883994055634302306901004627138398942 0893493064203437392581198057376948104307704317 0922624909898941862584576996550610599889589595 0151438972189897280757444080030826671244128402 1996238156672708227086163599291455810566658593 2476242900210990199253731991185136882936097565 7596637043167803673252902762687629211279342910 5406329347892380908191767471004597233477281595 2375714734924051186889269747366733428299314906 4049820859893399759482812733680265801125697620 615143795281310348613779363201470536



# Chapitre 4

## Calcul de l'identité du groupe

Ce chapitre est dédié à l'étude de l'identité du groupe du Tas de Sable. Dans un premier temps, nous donnons les différentes méthodes connues pour calculer cette configuration, puis après avoir exhibé une nouvelle méthode expérimentalement 2 fois plus rapide que les autres, nous montrons comment cette méthode appliquée à l'étude des grilles rectangulaires permet de prouver une conjecture d'Olivier Marguin [Mar97].

### 4.1 Calcul de l'identité

Nous allons étudier dans cette section différentes méthodes connues pour le calcul de l'identité du groupe. Nous présenterons dans un prochain chapitre une méthode basée sur les bases de Gröbner pour réaliser ce même calcul.

#### 4.1.1 Algorithme avec 2 additions

Cet algorithme se base sur la proposition 7. En effet on a vu que

$$Id = \delta \oplus \overline{\delta \oplus \delta}$$

où  $\bar{u}$  représente la configuration  $\delta - u$ .

Ainsi il suffit de calculer  $\delta + \delta$  puis d'ébouler le résultat. Enfin on réalise la complémentation à  $\delta$  puis on ajoute à nouveau  $\delta$  et on éboule l'ensemble.

Cette méthode est néanmoins lente comme nous le verrons par la suite.

L'algorithme présenté ici repose sur l'addition de deux configurations. Je donne ci-dessous l'algorithme utilisé pour additionner des configurations. La complexité de cet algorithme sera étudié dans un prochain chapitre mais il est évident que le nombre d'opérations réalisées par cet algorithme est égal au nombre d'éboulements nécessaires pour stabiliser la configuration.

**INPUT :**  
 {  $n$  nombre de sommets  
 {  $tab[1..n]$  tableau du nombre de grains sur le sommet  $i$

**OUTPUT :**  $tab[i]$  tableau du nombre de grains de la configuration stable obtenue après éboulement

*Variables :*

- *listeInstable* : liste contenant les sommets instables
- *tabM[]* : Tableau de booléens marquant les sommets qui sont dans la liste

**Algorithme :**

Pour  $i$  de 1 à  $n$  si  $i$  instable alors

- Ajouter  $i$  dans *listeInstable*
- Mettre  $tabM[i]$  à vrai

Tant que *listeInstable* non vide :

- Considérer le premier sommet  $i$  de la *listeInstable* :
  - Décrémenter son nombre de grains de  $d_i$  (degré du sommet  $i$ )
  - Pour chaque voisin  $j$  de  $i$  incrémenter de  $E(i, j)$  son nombre de jetons.
- Si  $i$  stable alors :
  - Supprimer  $i$  de la *listeInstable*
  - Mettre  $tabM[i]$  à faux
- Pour chaque voisin instable  $j$  de  $i$  tel que  $tabM[j] = \text{faux}$  :
  - Ajouter  $j$  dans *listeInstable*
  - $tabM[j] = \text{vrai}$

La complexité expérimentale et théorique de cet algorithme seront données dans la suite de ce chapitre.

### 4.1.2 Algorithme thermique

Cet algorithme proposé par Bak et Creutz [BC95] se base sur le "burning" algorithme de Dhar [DRSV95]. Le nom de "burning" algorithme provient du fait que l'on part de la configuration froide où toutes les cellules sont à 0 et que on réchauffe petit à petit cette configuration pour obtenir l'identité.

Le réchauffement de la configuration consiste à l'addition de la configuration  $\beta$  et à l'éboulement de la nouvelle configuration obtenue.

On obtient ainsi l'algorithme suivant :

**Entrée :**

- Graphe  $G = (V, E), |V| = n + 1$
- Configuration  $u = (0, \dots, 0)$

**Sortie :** Configuration identité  $u$

**Variables :**

- $nEboul = 0$

Tant que  $nEboul < n$  faire

- $u \leftarrow u + \beta$
- $(u, nEboul) \leftarrow \hat{u}$  où  $nEboul$  est le nombre d'éboulements lors de la relaxation de  $u$

La complexité  $C(p, q)$  de cet algorithme sur une grille  $p \times q$  a été étudié par Olivier Marguin [Mar97] qui obtient le résultat suivant :

$$\frac{1}{12}p^2(p + 3q) \leq C(p, q) \leq \frac{1}{24}p^3(p + 4q)$$

Expérimentalement on obtient les résultats suivants :

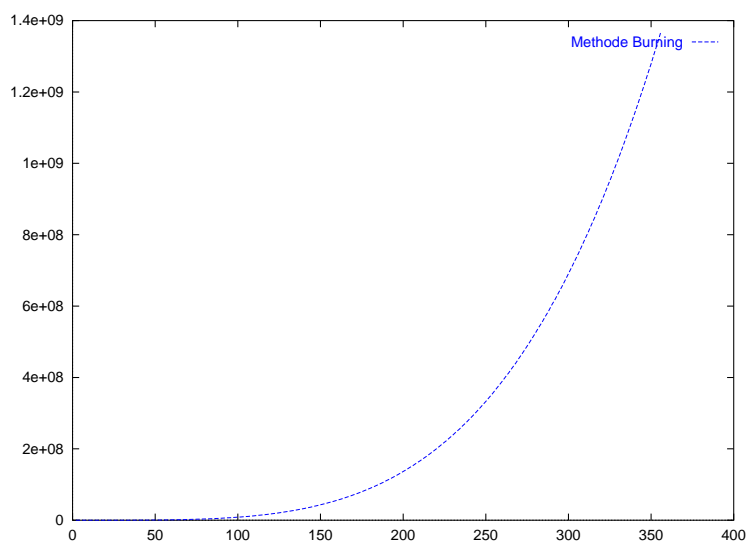


FIG. 4.1 – Algorithme Thermique

### 4.1.3 Algorithme par classes pour le cas de la grille

L'algorithme que je présente ici est expérimentalement le plus performant comme nous le verrons plus tard. Cet algorithme spécifique au cas de la grille permet en outre de démontrer différents résultats qui n'étaient pour l'instant que des conjectures.



Or

$$D = \sum_{i=1}^{p/2} 2D^{(i)}$$

Ainsi,  $D$  est dans la classe d'équivalence de l'identité. Or  $D$  est une configuration supérieure en tout point à la configuration 2-uniforme qui est récurrente donc  $\hat{D}$  est récurrente dans la classe de l'identité. Par le théorème 2,  $\hat{D}$  est donc la configuration identité.

□

Expérimentalement on obtient la complexité suivante :

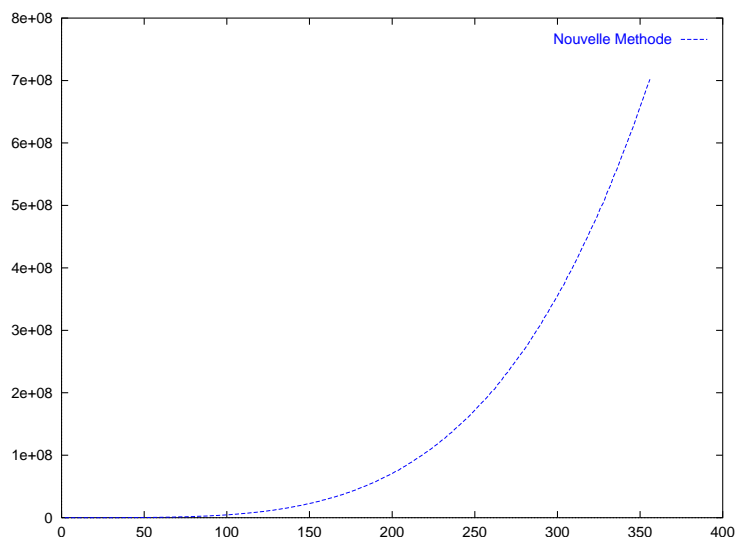


FIG. 4.4 – Méthode par classes pour une grille carrée

#### 4.1.4 Comparaison des différentes méthodes

Les complexités théoriques de ces différentes méthodes ne peuvent être bien déterminées. Les bornes supérieures et inférieures obtenues ne permettent pas de classer ces méthodes selon leur complexité.

Nous donnons ci-après un graphique comparant le nombre d'éboulements nécessaires pour calculer l'identité du groupe par les différentes méthodes.

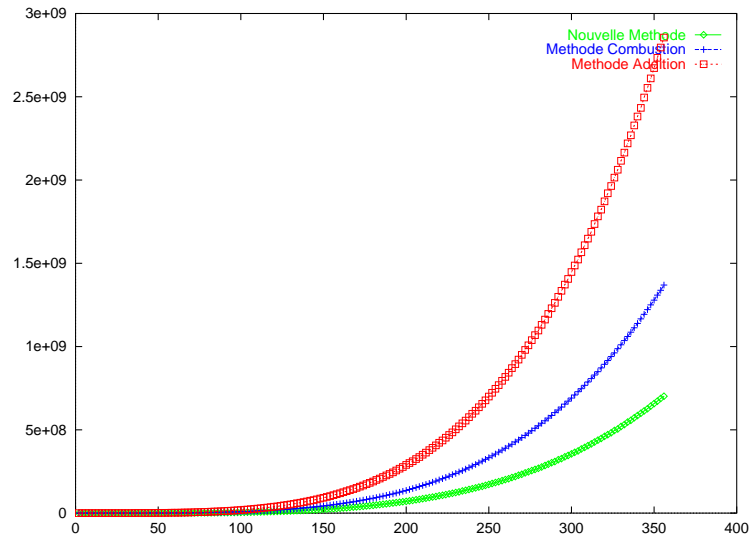
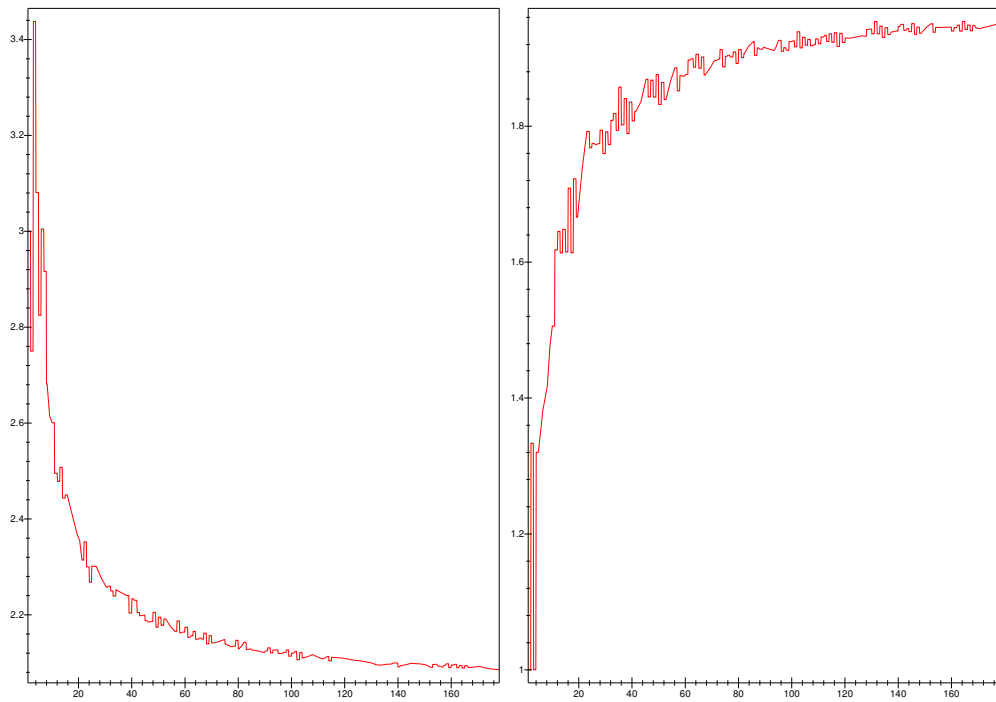


FIG. 4.5 – Comparaison des différentes méthodes du calcul de l'identité

FIG. 4.6 –  $\frac{\text{Addition}}{\text{Combustion}}$  et  $\frac{\text{Combustion}}{\text{Classe}}$

Notons  $n_1, n_2$  et  $n_3$  les nombres d'éboulements réalisés dans le calcul de l'identité par les méthodes d'addition, de combustion et par classes respectivement.

**Conjecture 1.** *Pour des grilles de grande taille on a  $n_1 \simeq 2n_2$  et  $n_2 \simeq 2n_3$ .*

## 4.2 Complexité théorique de l'addition par l'algorithme naïf

Dans cette partie, nous allons étudier la complexité théorique de l'algorithme d'addition de deux configurations récurrentes sur un graphe donné. [Ros98]

L'intuition de la démonstration vient du fait que pour qu'un grain de sable s'échappe du système, il doit tomber sur le puits. Pour cela il doit donc parcourir tous les sommets situés entre son sommet d'origine et le puits. Ainsi il est naturel de classer les sommets du graphe de par leur distance au puits. On notera par  $p$  la distance maximale entre un sommet et le puits.

### 4.2.1 Partition des arêtes

Soit  $G = (V, E)$  un graphe où  $|V| = n + 1$ ,  $(n + 1)$  sera le puits. On dénote par  $d(i)$  la distance d'un sommet  $i$  par rapport au puits.  $E$  représente l'ensemble des arêtes. On classe les sommets selon leur distance au puits et pour chaque sommet  $i$ , on note :

- $g(i)$  le nombre d'arêtes reliant  $i$  à un sommet  $j$  tel que  $d(j) > d(i)$ .
- $l(i)$  le nombre d'arêtes reliant  $i$  à un sommet  $j$  tel que  $d(j) < d(i)$ .
- $e(i)$  le nombre d'arêtes reliant  $i$  à un sommet  $j$  tel que  $d(j) = d(i)$ .

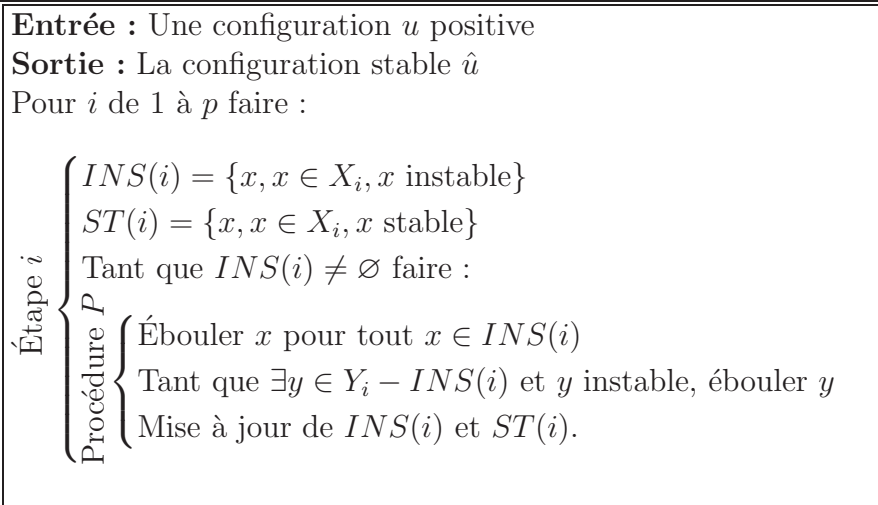
On obtient ainsi pour chaque sommet une partition des arêtes telle que  $g(i) + l(i) + e(i) = d(i)$ .

### 4.2.2 Algorithme d'éboulement

Les éboulements pouvant être réalisés dans un ordre quelconque par la Proposition 2, nous donnons un algorithme permettant de les ordonner partiellement.

A cette fin nous noterons  $X_i$  l'ensemble des sommets à distance  $p + 1 - i$  du puits et par  $Y_i$  les sommets à distance au plus  $p + 1 - i$ .

On appellera *actif* un sommet qui s'est éboulé.



### 4.2.3 Étude de complexité de l'algorithme

**Théorème 13.** ([Ros98]) Soient  $u$  et  $v$  deux états récurrents d'un graphe à  $n$  sommets. Soit  $w = \widehat{u + v}$ . Le nombre d'éboulements nécessaires pour le calcul de  $w$  à partir de  $u + v$  est  $4pmn$  et cette borne est atteinte à un facteur multiplicatif près pour le graphe sucette.

- $p$  est la profondeur du graphe par rapport au puits
- $m$  est le nombre d'arêtes du graphe

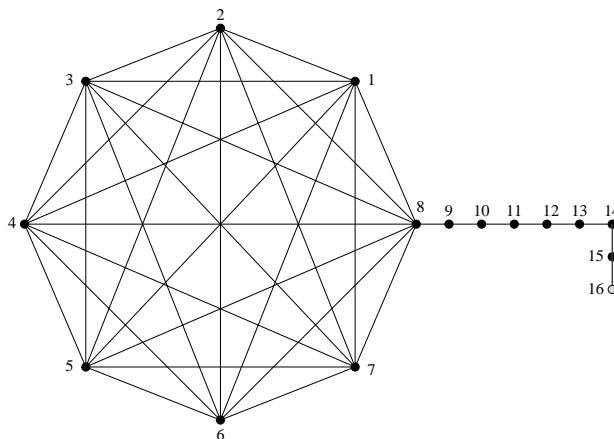


FIG. 4.7 – Le graphe sucette

*Démonstration.*

**Lemme 5.** Soit  $E_i$  le nombre de grains sur l'ensemble des sommets de  $X_i$  après l'étape  $i - 1$ . Alors :

$$E_i < 2 \left( \sum_{j \in Y_i} d_j \right)$$

*Démonstration.* Il est clair qu'après l'étape  $i - 1$  de l'algorithme, tous les sommets de  $Y_{i-1}$  sont stables, et les sommets à distance  $p - i + 1$  au plus du puits n'ont échangé aucun grain.

Les grains de sable sur les sommets de  $X_i$  proviennent de l'éboulement des sommets de  $Y_{i-1}$ .

Or le nombre de grains de sable dans la configuration  $u$  sur les sommets de  $Y_i$  est majoré par

$$2 \sum_{j \in Y_i} d_j$$

□

Il reste maintenant à étudier la complexité de la procédure  $P$ . Soit  $u$  la configuration avant la procédure  $P$  et  $u'$  la configuration à la sortie d'une itération de la procédure  $P$ .

On va montrer le résultat suivant :

**Lemme 6.** *Pendant le calcul de  $u'$  il y a eu au plus  $N_i$  éboulements où  $N_i$  est le nombre de sommets à distance au moins  $p + 1 - i$  du puits. De plus pour chaque sommet  $j \in X_i$  instable de  $u$  on a  $u'_j < u_j$ . Enfin les sommets de  $Y_i$  stables pour  $u$  le sont aussi pour  $u'$ .*

*Démonstration.* Je rappelle ci-dessous les deux étapes de la procédure  $P$  :

1. Ébouler  $x$  pour tout  $x \in INS(i)$
2. Tant que  $\exists y \in Y_i - INS(i)$  et  $y$  instable, ébouler  $y$

Dans la première étape seuls les sommets de  $INS(i)$  s'éboulent une fois.

Dans la deuxième étape, on va montrer que les sommets de  $Y_i - INS(i)$  s'éboulent au plus 1 fois. Supposons que  $j$  soit le premier sommet de  $Y_i - INS(i)$  à s'ébouler deux fois. Ce sommet était stable dans  $u$  donc  $u_j < d_j$ . Ce sommet s'est éboulé une fois précédemment donc il avait perdu  $d_j$  grains de sable. Or ses voisins ne se sont éboulés qu'au plus une fois donc ce sommet n'a gagné qu'au plus  $d_j$  grains. Donc au total ce sommet a perdu des grains ou est resté inchangé. Donc ce sommet est stable et ne peut s'ébouler une deuxième fois.

Finalement on a bien  $N_i$  éboulements au maximum. □

Ainsi par le lemme 6, le coût de la procédure  $P$  est au plus  $N_i$ . Or par le lemme 5, il y a au plus  $2(\sum_{j \in Y_i} d_j)$  grains de sable sur l'ensemble des sommets de  $X_i$  donc à fortiori sur un sommet de  $X_i$ . Comme à chaque itération de  $P$ , les sommets instables de  $X_i$  perdent au moins un grain, en répétant la procédure  $P$   $2(\sum_{j \in Y_i} d_j)$  fois, les sommets de  $Y_i$  seront tous stables.

Finalement la complexité est donc de :

$$\sum_{i=1}^p 2 \left( \sum_{j \in Y_i} d_j \right) N_i$$

On peut majorer cette complexité en fonction du nombre de sommets  $n$  et du nombre d'arêtes  $m$  du graphe en remarquant que :

$$\sum_{j \in Y_i} d_j \leq 2m$$

$$N_i \leq n$$

On obtient ainsi une complexité de  $4pmn$ .

Il reste maintenant à calculer la complexité de l'addition sur le graphe sucette. Le graphe sucette est formé du rapprochement d'un graphe complet à  $p$  sommets et d'un graphe chaîne à  $q$  sommets. le sommet  $p$  du graphe complet et le sommet 1 de la chaîne sont reliés. Le puits est le sommet  $q$  de la chaîne.

Nous représenterons une configuration par une paire

$$(\langle u_1, u_2, \dots, u_p \rangle, \langle v_1, v_2, \dots, v_q \rangle)$$

où les  $u_i$  sont les nombres de grains sur les cellules du graphe complet et les  $v_i$  le nombre de grains sur les cellules de la chaîne.

Soit la configuration récurrente  $c$  suivante :

$$\langle (p-1, p-1, \dots, p-1), (1, 1, \dots, 1) \rangle$$

On cherche à calculer  $c \oplus c$ . On a

$$c + c = \langle (2p-2, \dots, 2p), (2, 2, \dots, 2) \rangle$$

Nous allons ébouler les  $p-1$  premiers sommets du graphe complet  $p-1$  fois. On réalise pour cela  $(p-1)^2$  éboulements. On obtient la configuration :

$$\langle (p-1, \dots, p-1, p^2+1), (2, \dots, 2) \rangle$$

Nous allons maintenant calculer le nombre d'éboulements requis pour faire diminuer le nombre de jetons sur le sommet  $p$  de 1 unité.

**Lemme 7.** Soit  $c^{(k)}$  la configuration :

$$\langle (p-1, \dots, p-1, k), (2, \dots, 2) \rangle$$

Alors pour passer de  $c^{(k)}$  à  $c^{(k-1)}$  il faut réaliser  $qp + \frac{q(q-1)}{2}$  éboulements.

*Démonstration.* Ébouillons les  $p$  sommets du graphe complet. Ébouillons ensuite les  $p$  sommets du graphe complet et le premier sommet de la chaîne. Puis les  $p$  sommets et 2 sommets de la chaîne jusqu'à ébouler les  $p$  sommets du graphe complet et les  $q-1$  sommets de la chaîne. On est bien passé de  $c^{(k)}$  à  $c^{(k-1)}$  et on a réalisé au total  $p + (p+1) + \dots + (p+q-1)$  éboulements.  $\square$

Or il faut répéter le lemme précédent  $p^2 - p + 1$  fois pour que le sommet  $p$  ait  $p$  grains. On a réalisé ainsi  $(p^2 - p + 1)(qp + \frac{q(q-1)}{2})$  éboulements.

On arrive ainsi à la configuration  $\langle (p-1, \dots, p-1, p), (2, 2, \dots, 2) \rangle$  Il reste ainsi à faire diminuer tous les sommets de valeur 2. Pour faire diminuer le  $k^{\text{ème}}$  sommet de la chaîne de 1 grain, il faut ébouler tout le graphe complet plus  $k$  sommets de la chaîne puis le graphe complet et  $k+1$  sommets de la chaîne jusqu'à ébouler l'ensemble des sommets.

On réalise ainsi  $(q - k)(p + k) + \frac{(q-k-1)(q-k)}{2}$  éboulements. On doit faire cette opération pour  $k \in \{1 \dots, q - 1\}$  ce qui fait au total  $q(q - 1)(2q + 3p - 1)/6$  éboulements.

On a ainsi réalisé  $1/3 q^3 + qp - 1/3 q + p^3 q + 1/2 p^2 q^2 - 3/2 p^2 q + p^2 - 2p + 1$  éboulements.

On veut maintenant trouver le maximum de cette fonction pour  $p + q = n$ . Les termes de degré 4 de cette équation sont :

$$p^3 q + 1/2 p^2 q^2$$

Substituons  $q$  par  $n - p$  on obtient  $p^3(n - p) + 1/2 p^2(n - p)^2$ . Le maximum de cette fonction est atteint pour  $p = n/\sqrt{2}$ . On obtient alors un nombre d'éboulements en  $n^4/8 + o(n^4)$ . □

### 4.2.4 Étude de certaines familles de graphes

La complexité obtenue au théorème 13 dépend de paramètres du graphe comme le nombre de sommets, d'arêtes ou le diamètre par rapport au puits. Ainsi, nous allons préciser cette complexité pour certaines familles de graphes.

#### La roue

La roue notée  $R_n$  est un graphe à  $n + 1$  sommets.  $n$  sommets forment un cycle de longueur  $n$  et sont tous reliés au dernier comme l'illustre la figure suivante :

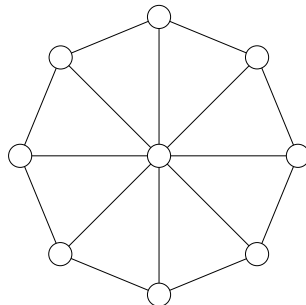


FIG. 4.8 – La roue  $R_8$

Dans le cas des roues, la complexité théorique obtenue précédemment nous donne une borne en  $\mathcal{O}(n^2)$  ( $2n$  arêtes,  $n$  sommets et profondeur 1.)

Mais il est immédiat de voir qu'à chaque éboulement d'un sommet, un grain de sable tombe dans le puits. Ainsi, la complexité réelle est de  $\mathcal{O}(n)$ .

#### La double roue

La double roue notée  $W_n$  est un graphe à  $2n + 1$  sommets. Les sommets 1 à  $n$  forment un cycle de longueur  $n$  ainsi que les sommets  $n + 1$  à  $2n$ . De plus si  $1 \leq i \leq n$  alors  $i$  est

relié à  $i + n$ . Si  $n + 1 \leq j \leq 2n$  alors  $j$  est relié à  $2n + 1$ . Je donne ci-dessous un exemple pour  $n = 8$ .

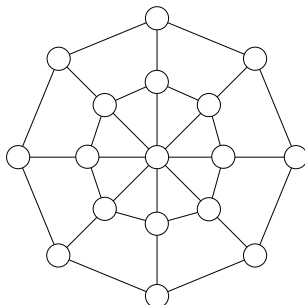


FIG. 4.9 – Double roue  $W_8$

La complexité théorique de la double roue est la même que pour la roue. Néanmoins on remarque que si on éboule 3 fois les sommets de la couronne extérieure et 2 fois les sommets de la couronne intérieure alors chaque sommet perd 1 grain de sable. Comme les sommets ne peuvent pas contenir plus de 8 grains de sable alors l'addition est aussi en  $\mathcal{O}(n)$ .

### La $k$ -roue

La  $k$  roue est la généralisation de la double roue. On appelle la  $k$  roue  $R_n^{(k)}$  le graphe à  $kn + 1$  sommets répartis en  $k$  cycles de longueur  $n$  reliés entre eux par  $n$  arêtes. Il y a de plus un sommet central relié à tous les sommets de la première couronne.

Partant d'une configuration  $u$ , si on éboule successivement les  $i$  roues extérieures puis les  $i + 1$  jusqu'à ébouler l'ensemble des roues, on obtient la même configuration  $u$  où les sommets de la  $i^{\text{ème}}$  roue ont perdu 1 grain.

Répétant ce processus pour  $i \in \{1 \dots k\}$  chaque sommet a perdu un grain. Pendant cette opérations on a réalisé  $\frac{n(k^2-1)}{2}$  éboulements. Comme un sommet ne peut avoir plus de 3 grains alors la complexité de l'addition est de  $\frac{3n(k^2-1)}{2}$ .

### La grille

On considère ici le cas de la grille  $n \times n$ .

Dans la grille, la profondeur du graphe est  $2n$ , le nombre de sommets  $n^2$  et le nombre d'arêtes  $(n + 1)^2$ . Ainsi, la complexité théorique de l'addition découlant du théorème 13 est  $\mathcal{O}(n^5)$ .

On peut obtenir un meilleur résultat en utilisant une méthode par potentiel. On suppose que l'on travaille sur une grille  $n \times n$ .

On va affecter à chaque cellule un niveau d'énergie tel que chaque éboulement se traduise par une perte d'énergie totale du système.

Pour cela on notera  $E_i$  le niveau d'énergie des cellules situées à distance  $i$  du puits. On suppose que  $E_0 = 0$ .

Soit une cellule  $c$  à distance  $i$  du puits. Trois cas sont à considérer :

1. La cellule  $c$  est le centre de la grille. On a alors le bilan énergétique suivant :

$$4E_i \rightarrow 4E_{i-1}$$

Ce bilan nous donne l'inégalité suivante :

$$E_i > E_{i-1}$$

2. La cellule  $c$  est sur un coin de la couronne à distance  $i$  du puits. Cette fois le bilan énergétique est la suivant :

$$4E_i \rightarrow 2E_i + 2E_{i-1}$$

On a cette fois l'inégalité suivante :

$$E_i > E_{i-1}$$

3. Dans ce dernier cas la cellule  $c$  a donc deux voisins à distance  $i$  du puits, un à distance  $i + 1$  et 1 à distance  $i - 1$ . Ainsi, le bilan est le suivant :

$$4E_i \rightarrow 2E_i + E_{i+1} + E_{i-1}$$

Ce bilan nous amène à :

$$2E_i > E_{i-1} + E_{i+1}$$

La solution générale de ce système est :

$$E(i) = \frac{i}{2} (2E(1) - i + 1)$$

La condition  $E(i) > E(i - 1)$  impose  $E(1) > n/2$ . Comme on cherche à minimiser les niveaux d'énergie on prendra :

$$E(i) = \frac{i}{2} (n - i + 1)$$

Comme à chaque éboulement l'énergie du système diminue de 1 au moins, l'énergie totale d'une configuration nous donne le nombre d'éboulements maximum à réaliser pour atteindre une configuration stable.

Lors de l'addition de deux configurations l'énergie maximale est atteinte pour la somme de la configuration 3-uniforme avec elle-même. Dans ce cas l'énergie est :

$$\begin{aligned} E &= \sum_{i=1}^{n/2} 24(n - i)E(i) \\ &= \sum_{i=1}^{n/2} 12i(n - i)(n - i + 1) \\ &= \frac{11}{16}n^4 + \frac{7}{4}n^3 + \frac{1}{4}n^2 - n \end{aligned}$$

Cette valeur est un majorant pour le nombre d'additions.

Pour le calcul de l'identité on a besoin de deux additions donc la complexité théorique est  $\frac{11}{8}n^4$ .

En réalité, on peut montrer [MN99] qu'on a aussi une borne inférieure en  $n^4$ .

Expérimentalement on obtient les résultats suivants :

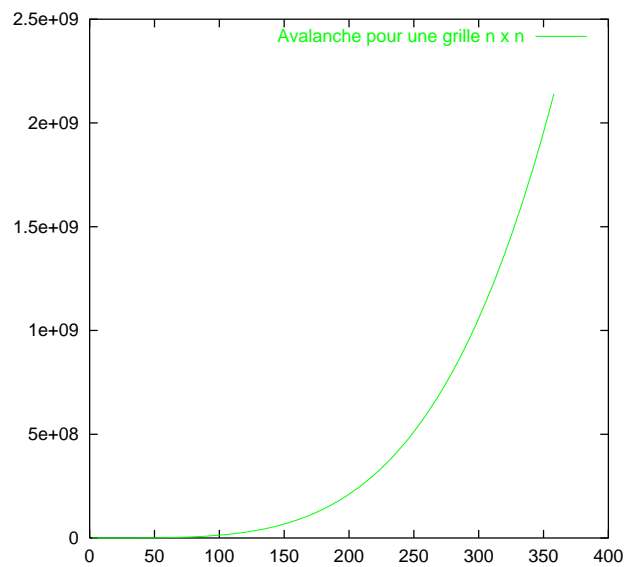
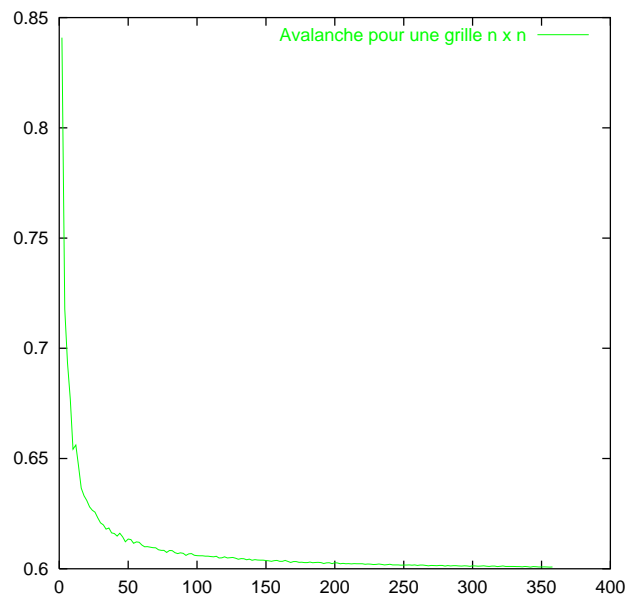


FIG. 4.10 – Nombre d'écroulements en fonction de la taille de la grille

Vérifions l'exposant de cet courbe. Pour cela nous avons tracé la fonction

$$y = f(n)^{1/4}$$

. Nous obtenons le résultat suivant :

FIG. 4.11 –  $\sqrt[4]{n}$  Nombre d'éboulements pour la grille  $n \times n$ 

La forte convergence vers 0.6 de cette courbe semble confirmer que la complexité de l'addition est de :

$$\left(\frac{6}{10}\right)^4 n^4 + o(n^4)$$

### 4.3 Application à l'étude de l'identité sur des grilles rectangulaires

Nous allons ici démontrer certaines propriétés de l'identité du Tas de Sable sur des grilles dont la longueur est bien plus grande que la largeur. Une preuve de ce résultat par un système de réécriture a été présenté à Lacim 2000 [RLB00].

Le but est ici de montrer que l'identité est de la forme suivante :

**Théorème 14.** *Soit une grille rectangulaire de taille  $p \times q$  alors si  $p > \sqrt{2}q$ , l'identité du groupe du Tas de Sable est de la forme suivante :*

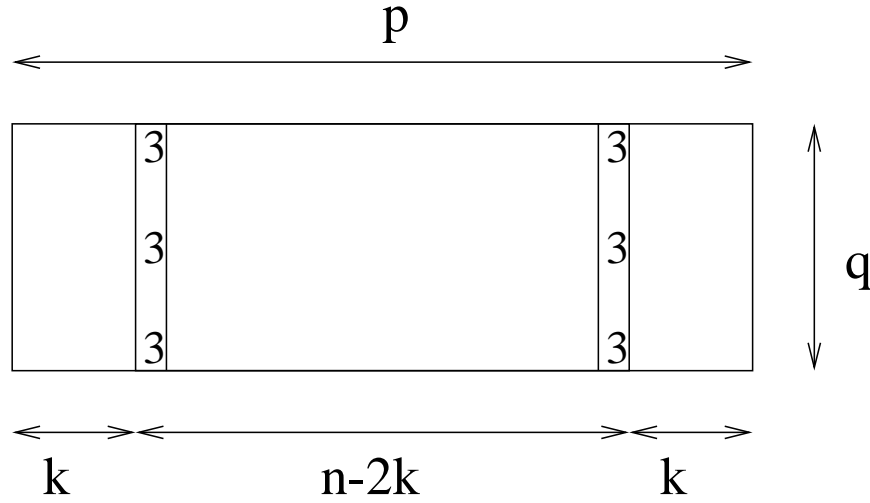


FIG. 4.12 – Forme de l'identité

avec  $q/2 < k < q/\sqrt{2}$ .

### 4.3.1 Nouvelle formule pour l'identité

Nous allons introduire ici une dernière formulation de l'identité qui nous permettra de caractériser certains paramètres.

Par mesure de simplification nous travaillerons ici sur la grille de taille  $2p \times 2q$ . Or par symétrie, il suffit alors de considérer les cellules  $(i, j)$  avec  $1 \leq i \leq p$  et  $1 \leq j \leq q$ .

Partons de la configuration  $u = 0$  qui appartient bien à la classe de l'identité.  $u_{i,j} = 0$  pour tout  $i, j \in \{1..p\} \times \{1..q\}$ .

Appliquons à cette configuration la matrice  $M$  d'éboulements. Cela veut dire que le sommet  $(i, j)$  s'éboule  $M_{i,j}$  fois.

$$\begin{cases} M_{i,j} = (p-j)(p-j+1) \text{ pour } j \in \{1..p\} \\ M_{i,2p+1-j} = (p-j)(p-j+1) \text{ pour } j \in \{1..p\} \end{cases}$$

On obtient alors la configuration  $u'$  telle que : Si  $2 \leq i \leq p$  et  $2 \leq j \leq q-1$

$$\begin{aligned} u'_{i,j} &= 0 - 4M_{i,j} + M_{i+1,j} + M_{i-1,j} + M_{i,j+1} + M_{i,j-1} \\ &= -2p^2 - 2j^2 + 4pj = 2p + 2j \\ &\quad + p^2 + j^2 - 2pj + 3p - 3j + 2 \\ &\quad + p^2 + j^2 - 2pj - p + j \\ &= 2 \end{aligned}$$

Si  $j = 1$  alors :

$$\begin{aligned} u'_{i,1} &= 0 - 4M_{i,1} + M_{i+1,1} + M_{i-1,1} + M_{i,j-1} + M_{i,j+1} \\ &= -2p^2 + 2p + p^2 - 3p + 2 \\ &= -p^2 - p + 2 \end{aligned}$$

Si  $j = q$ , seuls la cellule voisine d'ordonnée  $q - 1$  s'éboule. Ainsi,  $u'_{i,j} = 2$   
Si  $i = 1$  :

$$\begin{aligned} u'_{1,j} &= -4M_{1,j} + M_{2,j} + M_{1,j-1} + M_{1,j+1} \\ &= -3p^2 + -3j^2 + 6pj - 3p + 3j \\ &\quad + p^2 + j^2 - 2pj - p + j \\ &\quad + p^2 + j^2 - 2pj + 3p - 3j \\ &= 2 - (p - j)(p - j + 1) \end{aligned}$$

Si  $i = j = 1$   $u'_{1,1} = 2 - 2p^2$

Ajoutons maintenant  $(p^2 + p)$  fois la configuration  $\beta$  à la configuration  $u'$  pour obtenir la configuration  $u''$ . On vérifie alors aisément que  $u''_{i,j} = 2$  pour les cellules  $(i, j)$  telles que  $2 \leq i \leq p$  et  $1 \leq j \leq q$ .

Pour les autres cellules d'abscisse 1 on a

$$u''_{1,j} = 2 + 2pj - j^2 + j$$

Nous avons ainsi démontré le lemme suivant :

**Lemme 8.** *La configuration  $u''$  définie ci-après est telle que  $\hat{u}'' = Id$ .*

$$\begin{cases} u''_{i,j} = 2 & \text{Si } i \geq 2 \\ u''_{1,j} = 2 - j^2 + 2pj + j & \text{sinon} \end{cases}$$

### 4.3.2 Majoration de $k$

La configuration  $u''$  introduite précédemment nous permet de prouver la majoration de la largeur  $k$ .

En effet, comme  $\hat{u}'' = Id$   $k$  nous est donné par la longueur d'éboulement de la première colonne  $u''$  sur une grille remplie de 2. Pour cette preuve nous avons besoin de quelques lemmes simples :

Nous définissons le support d'une opération d'éboulement  $u \xrightarrow{*} v$  ou  $u \xrightarrow{-*} v$  comme étant l'ensemble des sommets s'ébouyant pendant cette opération.

**Lemme 9.** *Soient  $u$  et  $v$  deux configurations positives telles que  $u_{i,j} \geq v_{i,j}$  pour tout  $i, j$  alors le support de l'opération  $u \xrightarrow{*} \hat{u}$  contient le support de  $v \xrightarrow{*} \hat{v}$ .*

*Démonstration.* La preuve de ce lemme est immédiate. En effet, il suffit de remarquer que  $v$  contient plus de grains en chaque sommet et donc que si  $v$  s'éboule en  $i, j$  alors  $u$  peut aussi s'ébouler en  $i, j$ . Il est alors évident qu'après l'éboulement on ait la même inégalité entre les deux configurations.  $\square$

**Lemme 10.** *Soit  $u$  une configuration telle que  $\hat{u}$  soit récurrente. Soit  $v$  une configuration telle que  $v_i < d_i$  pour tout  $i$  et  $u \xrightarrow{*} v$ .*

*Alors, le support de  $u \xrightarrow{*} \hat{u}$  est inclus dans celui de  $u \xrightarrow{*} v$ .*

*Démonstration.* Nous allons montrer ici l'inclusion des supports avec multiplicité c'est à dire que chaque sommet s'éboulant  $l$  fois pour la première opération s'éboule aussi au moins  $l$  fois dans la deuxième opération.

Considérons la suite  $s = (s_1, s_2, \dots, s_p)$  des éboulements de l'opération  $u \xrightarrow{*} \hat{u}$ . Considérons maintenant la même suite  $s' = (s'_1, \dots, s'_q)$  pour l'opération  $u \xrightarrow{*} v$ . Supposons que l'inclusion des supports avec multiplicité n'ait pas lieu. Cela veut dire qu'il existe un sommet  $s_i$  présent dans la suite  $s$  dont la multiplicité est plus grande que dans  $s'$ .

Soit  $\alpha$  le plus petit entier tel que  $s_\alpha$  ne vérifie pas la propriété d'inclusion des supports avec multiplicité. Partant de la configuration  $u$  et appliquant les éboulements  $s_1, \dots, s_{\alpha-1}$  on obtient une configuration  $u'$  où le sommet  $s_\alpha$  est instable.

Par définition de  $\alpha$  tous les sommets de  $s_1, \dots, s_{\alpha-1}$  sont aussi présent dans  $s'$  avec même multiplicité. Ainsi, partant de  $u$  l'application de la chaîne  $s'$  mène à une configuration  $u''$  où le sommet  $s_\alpha$  est instable. En effet, ce sommet a subi le même nombre d'éboulements que dans  $s_1, \dots, s_{\alpha-1}$  et ses voisins au moins le même nombre.  $\square$

Utilisons maintenant la configuration  $u''$  définie au lemme 8. Nous appliquons à cette configuration la matrice  $M$  d'éboulement suivante :

$$M_{i,j} = .5(q\sqrt{2} - i)(q\sqrt{2} - i + 1) \text{ pour } i \in \{1..p\}$$

Le reste de la matrice est obtenue par symétrie  $i \leftrightarrow 2p - i$ . Il est facile de vérifier que l'application de cette matrice conduit à une nouvelle configuration  $z$  telle que  $z_{i,j} < 4$  pour tout  $(i, j)$ . Par application du lemme 10, on a démontré la borne supérieure de notre encadrement de  $k$ .

### 4.3.3 Minoration de $k$

La minoration de  $k$  provient de la configuration  $D$  introduite au début de ce chapitre. En effet  $D_{q,q} = 4$  ce qui prouve que  $k > q$ .

### 4.3.4 Étude de la frontière

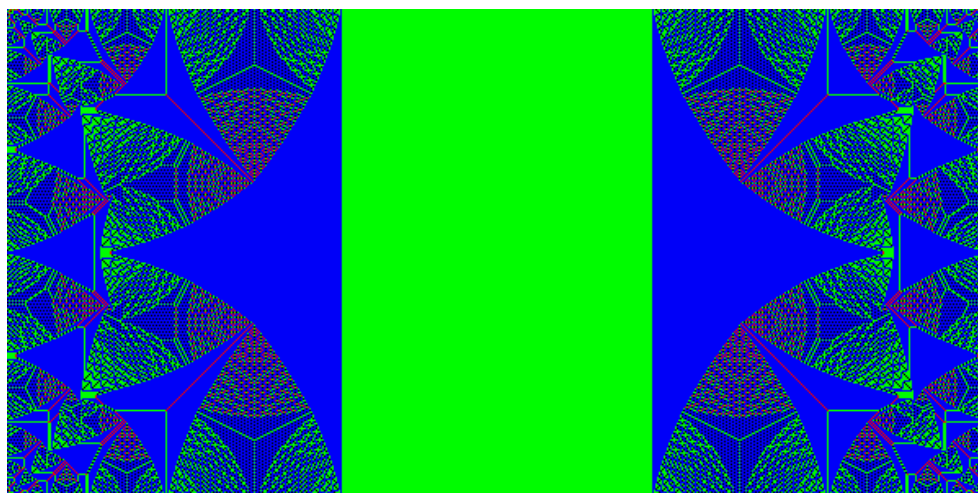
Nous allons ici montrer que la frontière entre les extrémités de taille  $k$  et la partie centrale remplie de 2 est une frontière verticale composée de 3.

En effet, dans la configuration  $u''$ , les sommets instables sont tous situés en  $i = 1$ . Notons  $S$  le support de l'opération  $u'' \xrightarrow{*} Id$ . Soit  $b_l = \max\{j, (l, j) \in S\}$ .

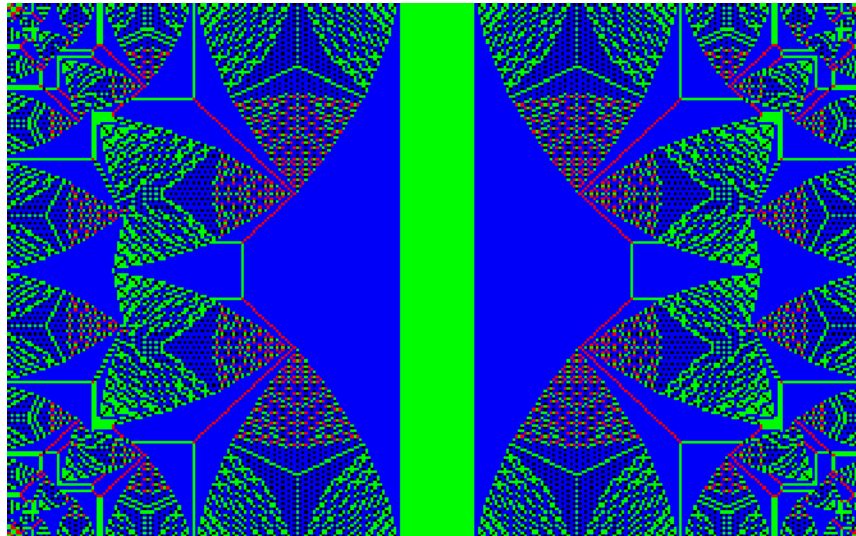
Nous allons montrer que  $b_l = k$  pour tout  $l$ . Supposons que  $u_l < u_{l+1}$ . Considérons alors la cellule  $(l, u_{l+1})$ . Cette cellule n'est pas dans le support. Or à l'origine (dans  $u''$ ) cette cellule contenait 2 grains de sable. Cette cellule ne s'éboule pas, elle ne perd pas de grains dans l'opération  $u'' \xrightarrow{*} Id$ . Par contre au moins deux des cellules voisines -à savoir  $(l, u_l)$  et  $(l + 1, u_{l+1})$  s'éboulent donnant chacune un grain de sable à la cellule  $(l, u_{l+1})$ . Ainsi cette cellule se retrouve avec 4 grains de sable devenant instable. Elle devrait donc appartenir au support de l'éboulement.

### 4.3.5 Exemples

Je donne ci-après quelques exemples d'identités sur les grilles rectangulaires pour illustrer ce résultat.



Comme pourrait le laisser supposer la figure suivante on serait en droit d'imaginer que la frontière entre les deux parties n'est pas seulement une ligne mais un triangle avec deux côtés incurvés. Malheureusement, il apparaît (les expérimentations ont été menées jusqu'à  $q = 400$ ) que des lignes de valeurs différentes de 3 naissent régulièrement dans cette zone comme le montre la figure suivante



# Chapitre 5

## Groupe des graphes planaires

Ce chapitre est dédié à l'étude spécifique de l'automate du tas de sable sur les graphes planaires. Il est basé essentiellement sur l'article [CR00].

Nous construisons une bijection explicite  $\varphi$  entre les configurations sur un graphe  $G$  et les configurations sur un de ses duals géométriques  $G^*$ . À l'aide de cette bijection, nous montrons que les groupes du tas de sable associés au graphe  $G$  et au graphe  $G^*$  sont isomorphes.

### 5.1 Graphes planaires

#### 5.1.1 Graphes planaires et dualité

**Définition 9.** *Un plongement planaire d'un graphe (ou multigraphe) planaire  $G$  est une fonction  $\phi$  qui associe à tout sommet du graphe un point de  $\mathcal{R}^2$  et à toute arête  $\{x, y\}$  du graphe une courbe simple ouverte du plan d'extrémités  $\Phi(x)$  et  $\Phi(y)$ . De plus pour deux arêtes du graphe  $e_1$  et  $e_2$ , les courbes  $\phi(e_1)$ ,  $\phi(e_2)$  ne s'intersectent pas.*

On dit qu'un graphe est *planaire* s'il admet un plongement planaire.

À toute représentation planaire de  $G$ , on associe un graphe dual  $G^*$ . Les sommets de  $G^*$  sont les domaines simplement connexes de  $G$  délimités par les arêtes de plongement (ce sont les faces). Chaque arête de  $G$  donne lieu à une arête  $e^*$  de  $G^*$  qui joint les faces délimitées par  $e$ .

**Remarque 8.** *On peut généraliser cette définition au cas de surfaces quelconques. Les plus couramment utilisées sont la sphère, le tore et la bouteille de Klein.*

Nous donnons ci-dessous un exemple de graphe ainsi que son dual. Ce graphe sera utilisé pour la suite de ce chapitre.

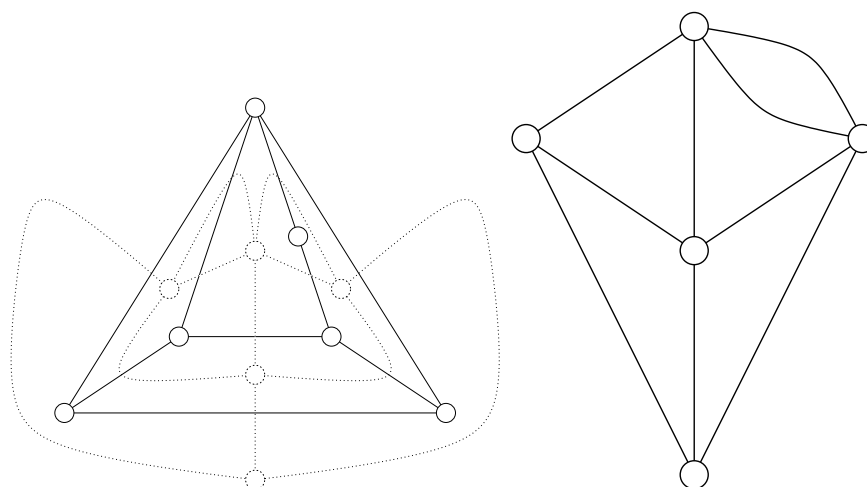


FIG. 5.1 – Exemple de graphe et son dual

### 5.1.2 Configuration flèche

Une *flèche* d'un multi-graphe est l'orientation d'une des arêtes du graphe. À chaque arête  $e = (x, y)$  du graphe, nous allons associer deux flèches opposées c'est à dire l'une orientée de  $x$  vers  $y$ , l'autre de  $y$  vers  $x$ .

Une configuration flèche est l'assignation  $w$  de valeurs de  $\mathbb{Z}$  à chaque flèche du graphe de sorte que pour deux flèches opposées  $a$  et  $b$  on ait :

$$w(a) + w(b) = 0$$

Pour simplifier les figures, nous opterons pour la représentation simplifiée suivante d'une configuration. On ne dessine qu'une unique flèche par arête, laquelle représentera l'orientation positive. Si  $w(a) = 0$ , nous ne représenterons pas l'orientation.

Une configuration flèche sur le graphe précédent est donnée juste après.

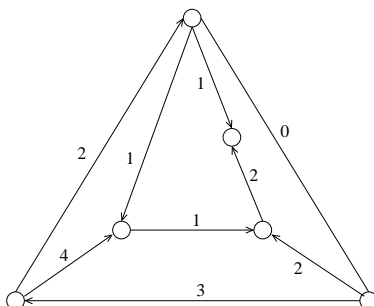


FIG. 5.2 – Une configuration flèche

### 5.1.3 Configuration sommets et faces

De chaque configuration flèche  $w$ , on déduit une configuration (sommet)  $\partial w$  sur  $G$  et une configuration (face)  $\partial^* w$  sur  $G^*$ .

#### Configuration (sommet)

Pour chaque sommet  $i$  de  $G$ ,  $(\partial w)_i$  est égal à la somme algébrique des  $w(a)$  sur l'ensemble des flèches  $a$  d'origine  $i$ .

#### Configuration face

Pour chaque face  $f_i$  de  $G$ , nous noterons  $(\partial^* w)_i$  la somme des  $w(a)$  sur l'ensemble des flèches  $a$  bordant la face  $f_i$ , le graphe étant plongé sur la sphère orienté. Les flèches sont sommées dans l'ordre trigonométrique.

Les configurations  $\partial w$  et  $\partial^* w$  issues de la configuration flèche  $w$  de la figure 5.2 sont représentées dans la figure 5.3.

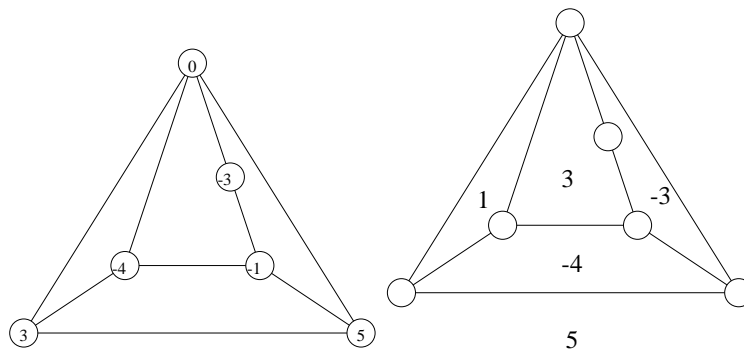


FIG. 5.3 – Configurations  $\partial w$  et  $\partial^* w$  issues d'une configuration flèche

## 5.2 Classe des graphes planaires

L'étude des graphes planaires peut paraître restrictive mais nous allons montrer qu'en toute généralité, on peut associer à tout groupe abélien fini un graphe dont le groupe du Tas de Sable sera isomorphe.

Soit  $G$  un groupe de forme de Smith  $G = \sum_{i \in \{1..k\}} \mathbb{Z}/d_i\mathbb{Z}$ . Considérons alors le graphe suivant :

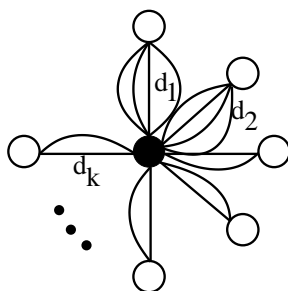


FIG. 5.4 – Graphe de groupe donné

Le sommet 1 est relié au puits par  $d_1$  arêtes et plus généralement le sommet  $i$  est relié au puits par  $d_i$  arêtes.

L'écriture de la matrice correspondante au graphe est dans ce cas directement sous forme de smith et les coefficients sont bien les  $d_i$ .

## 5.3 Groupe du graphe dual d'un graphe planaire

### 5.3.1 Isomorphisme de groupe

Nous nous proposons de prouver ici le résultat principal de ce chapitre.

**Théorème 15.** *Soit  $G$  un graphe planaire connexe et  $G^*$  un de ses duals. Alors  $SP(G)$  est isomorphe à  $SP(G^*)$ .*

La démonstration de ce théorème est donnée ci-après et consiste à effectuer un parallèle entre les configurations flèches et les configurations d'un tas de sable.

### 5.3.2 Configurations de moyenne nulle

**Proposition 10.** *Soit  $u$  une configuration sur un graphe  $G = (X, E, x_n)$  telle que*

$$\sum_{i=1}^n u_i = 0$$

*Alors il existe une configuration flèche telle que :*

$$\partial(w) = u$$

*Démonstration.* On pourra s'aider de l'exemple suivant :

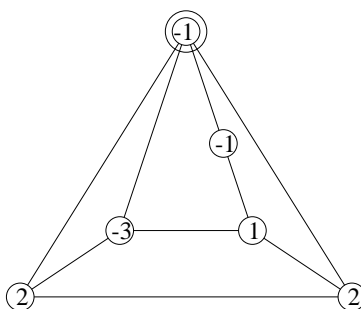


FIG. 5.5 – Configuration du tas de sable

Soit  $T$  un arbre couvrant du graphe de racine  $x_n$ .

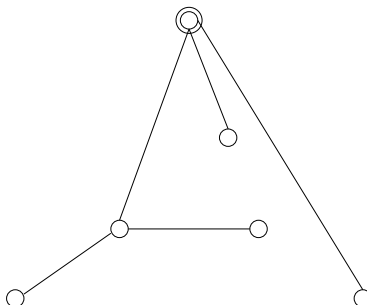


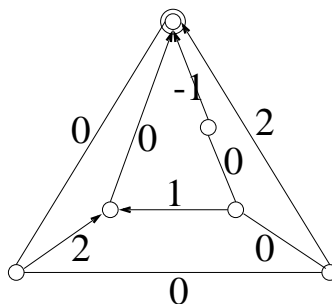
FIG. 5.6 – Arbre couvrant de racine le puits

Nous orientons les arêtes de  $T$  de sorte que chaque arête pointe en direction de  $x_n$ , et nous définissons  $w$  de la manière suivante :

- Pour toute flèche  $a$  qui n'est pas dans  $T$ ,  $w(a) = 0$ .
- Pour toute flèche  $a$  qui a comme origine  $x_i$  une feuille de l'arbre  $w(a) = u_i$
- Pour les sommets  $i$  où  $w(a)$  est défini pour toutes les flèches entrantes alors on définit  $w(b)$  pour l'unique flèche  $b$  sortante de  $i$  par :

$$w(b) = u_i - \sum_a w(a)$$

La somme étant prise sur toutes les arêtes  $a$  sortant de  $i$ .



On voit alors aisément que la relation  $\partial(w)_i = u_i$  est satisfaite pour tous les sommets sauf peut-être  $x_n$ . Mais comme la somme des  $u_i$  est nulle que la somme des  $w(a)$  sur l'ensemble des flèches aussi, alors la relation est vraie pour  $x_n$ .  $\square$

De manière similaire, on peut construire pour une configuration  $v$  de  $G^*$  une configuration flèche  $w$  telle que  $\partial^*w$  est égale à  $v$  en tout point sauf pour un sommet donné de  $G^*$ .

### 5.3.3 Base de l'espace des cycles d'une carte plane

À tout sommet  $x_i$  un sommet du graphe  $G$ , on associe la configuration flèche  $D_i$  de la manière suivante :

- Si  $a$  a comme origine  $x_i$  alors  $D_i(a) = 1$
- Si  $a$  a comme fin  $x_i$  alors  $D_i(a) = -1$
- Sinon  $D_i(a) = 0$

On vérifie alors que  $\partial D_i = \Delta_i$  et  $\partial^* D_i = 0$ .

De manière similaire nous définissons la configuration flèche  $D_j^*$  associée à chaque face  $f_j$  de  $G$  suivant la règle : On fixe en premier lieu une orientation du plan par exemple le sens trigonométrique.

- Si  $a$  borde  $f_j$  et est orientée positivement par rapport à l'orientation choisie alors  $D_j^*(a) = 1$
- Si  $a$  borde  $f_j$  mais est orienté négativement alors  $D_j^*(a) = -1$ .
- Sinon  $D_j^*(a) = 0$

On vérifie alors que  $\partial^* D_j = \Delta_j^*$  et  $\partial D_j = 0$ .

Un exemple de configuration pour chacun de ces deux cas est donné dans la figure 5.7

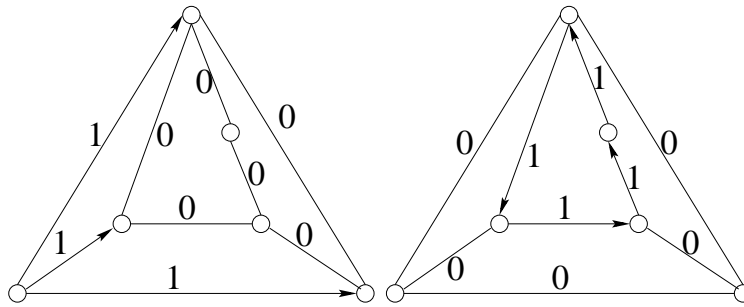


FIG. 5.7 – Configuration  $D_j$  et  $D_j^*$

**Proposition 11.** Soit  $G$  un graphe plane alors si  $w$  est une configuration flèche sur  $G$  telle que  $\partial w = 0$  alors  $w$  est une combinaison linéaire des  $D_j^*$  pour  $j$  dans  $1..n - 1$ .

*Démonstration.* Une preuve de cette proposition peut être trouvée dans le livre de W.Tutte [Tut84]. Nous donnons ici une autre démonstration qui nous paraît plus simple.

Une première remarque est de constater que  $\sum_{i=1}^n D_i^* = 0$ . Cela explique l'élimination d'une face dans le théorème précédent. On dira que cette face est distinguée. Montrons que les  $D_i^*$  pour  $i$  n'étant pas la face distinguée forment une famille libre.

Soit  $\lambda_j$  des coefficients dans  $\mathcal{R}^n$  tels que :

$$\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_j D_j^* = 0$$

Soit  $e$  une arête. Alors  $e$  borde la face  $i$  et la face  $j$  et aucune autre face. Ainsi,  $\lambda_i = \lambda_j$ .

Soit  $e$  une arête bordant la face distinguée.  $e$  est aussi sur la frontière de la face  $i$ . Comme  $D_n^*$  n'apparaît pas dans la somme,  $\lambda_i = 0$ .

Par connexité du graphe on en déduit que  $\lambda_j = 0$  pour tout  $j$ .

La deuxième partie de cette preuve est de montrer que la dimension de l'espace cherché est bien  $n - 1$ .

Nous définissons par  $A$  l'espace des configurations flèches telles que les deux flèches d'une même arête aient la même valeur.

$A^\perp$  est donc l'espace des configurations flèches ayant une valeur opposée sur la flèche et son opposé.

$$\dim A = \dim A^\perp = m$$

$S$  est l'espace des configurations flèches ayant même valeur sur toutes les flèches arrivant en un sommet.

$S^\perp$  l'espace de celles qui ont comme somme algébrique 0 en tous sommet.

$$\dim S = n, \dim S^\perp = 2m - n$$

Nous cherchons la dimension de l'espace des configurations qui ont une somme algébrique nulle en tout sommet et une valeur opposée sur les deux flèches d'une arête. Cette dimension est donc la dimension du sous-espace engendré par  $A^\perp \cap S^\perp$ .

Or

$$\dim(A^\perp \cup S^\perp) + \dim(A^\perp \cap S^\perp) = \dim A^\perp + \dim S^\perp$$

Par les deux équations précédentes on obtient :

$$\dim(A^\perp \cup S^\perp) + \dim(A^\perp \cap S^\perp) = m + 2m - n$$

Considérons maintenant l'espace  $A \cap S$ . Il représente l'espace des configurations qui ont même valeur sur les deux flèches d'une arête et même valeur sur toutes les flèches arrivant en un sommet. Ainsi, il suffit de fixer la valeur d'une flèche pour les fixer toutes. Donc  $\dim(A \cap S) = 1$ .

Ceci implique que  $\dim(A^\perp \cup S^\perp) = 2m - 1$

Finalement on obtient

$$\dim(A^\perp \cap S^\perp) = m - n + 1$$

Or par la formule d'Euler  $m - n + 1 = |\text{faces}| - 1$  pour un graphe planaire.

□

Nous pouvons maintenant démontrer notre théorème principal en construisant un isomorphisme de groupe  $\varphi$  de  $SP(G)$  dans  $SP(G^*)$ .

Soit  $\bar{u}$  une configuration du multigraphe  $G$  telle que  $\bar{u}$  est l'image de  $u$  et  $\sum_{i=1}^n u_i = 0$ . Alors il existe une configuration flèche  $w$  telle que  $\partial w = u$  et nous définissons  $\varphi(\bar{u})$  par :

$$\varphi(\bar{u}) = \overline{\partial^* w}$$

où  $\overline{\partial^* w}$  est l'image de  $\partial^* w$  dans  $SP(G^*)$ .

Nous allons dans un premier temps montrer que  $\varphi$  est bien défini. En effet, dans la définition précédente, nous avons fait deux choix arbitraires :

1. Prendre  $w$  telle que  $u = \partial w$ . En effet, il existe plusieurs  $w$  vérifiant cette propriété. Mais par la proposition 11, si  $w'$  est tel que  $\partial w = \partial w' = u$  alors  $w - w'$  est une combinaison linéaire des  $D_i^*$ . Cela est équivalent à dire que

$$\partial w - \partial w' \in \langle \Delta_1^*, \Delta_2^*, \dots, \Delta_p^* \rangle$$

et dans ce cas on a  $\overline{\partial w} = \overline{\partial w'}$ .

2. L'autre choix réalisé est celui de la configuration  $u$  telle que son image soit  $\bar{u}$  dans  $SP(G)$ . Soient deux configuration  $u$  et  $u'$  telles que  $\bar{u} = \overline{u'}$  alors  $u = u' + \sum \alpha_i \Delta_i$ . Soit  $w$  telle que  $\partial w = u$ . Alors on vérifie aisément que  $\partial(w + \alpha_i D_i) = u'$ . Mais  $\partial^* D_i = 0$  donc  $w' = w + \sum \alpha_i D_i$  définit  $\varphi(u')$  et  $\overline{\partial^* w} = \overline{\partial^* w'}$ .

Ainsi  $\varphi$  est bien définie. Montrons maintenant que  $\varphi$  est un homomorphisme de groupe. Soit deux configuration  $u$  et  $v$  sur  $G$  et deux configuration flèches  $w$  et  $t$  telles que  $\partial w = u$  et  $\partial t = v$ . De la relation  $\partial(w + t) = u + v$  on en déduit :

$$\varphi(\bar{u} + \bar{v}) = \partial^*(w + t) = \partial^* w + \partial^* t$$

Pour montrer que la fonction  $\varphi$  est bijective, il suffit de remarquer qu'à une configuration  $v^*$  de  $G^*$ , on peut associer une configuration flèche  $w^*$  telle que  $\partial^* w^* = v^*$  et  $\varphi(\overline{\partial w^*}) = v^*$ .

Nous venons donc de démontrer le théorème 15.

## 5.4 Application à différentes familles de graphes

### 5.4.1 Le cas de la grille

Ce théorème permet de traiter le cas de la grille avec ou sans le sommet particulier représentant le puits.

En effet nous avons vu que la grille se représentait par le graphe suivant :

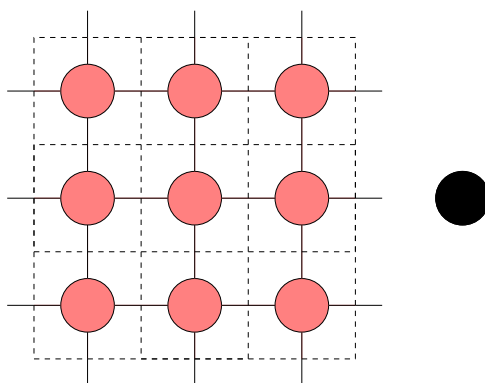


FIG. 5.8 – Graphe correspondant à la grille (Les arêtes libres sont reliés au sommet noir.)

Nous noterons  $G_p(n, p)$  ce graphe.

Or le graphe dual de ce multigraphe est le même graphe que l'on notera  $G(n, p)$  privé du sommet noir.

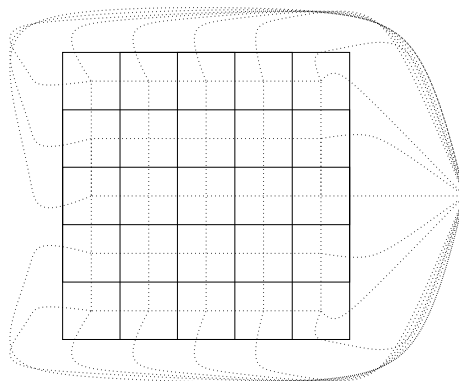


FIG. 5.9 – Graphe correspondant à la grille et son dual

Ainsi on a démontré le résultat suivant :

**Proposition 12.** *Les groupes  $SP(G)$  et  $SP(G_p)$  sont isomorphes.*

### 5.4.2 Cas des grilles à maille triangulaire et hexagonale

Nous avons étudié intensivement le cas de la grille à maille carrée (chaque sommet a 4 voisins). Mais il pourrait être intéressant de voir les grilles à maille triangulaire ou hexagonale qui permettent elles-aussi de paver le plan.

Or il est facile de voir sur la figure 5.10 que ces grilles sont duales l'une de l'autre ce qui nous permet d'affirmer que leur groupes sont isomorphes.

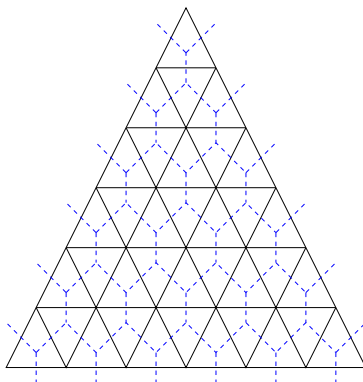


FIG. 5.10 – Graphe correspondant à la grille triangulaire et son dual la grille hexagonale

# Chapitre 6

## Configurations récurrentes et idéaux binomiaux

Ce chapitre établit un parallèle entre les monômes irréductibles d'un idéal binomial lié à un graphe  $G$  et les configurations récurrentes associées à ce même graphe.

Ce parallèle est donné sous une forme bijective. Il est en outre montré comment cette bijection permet d'étendre la loi de calcul du groupe au cas de réduction de polynôme dans un idéal et donne une nouvelle méthode pour le calcul de l'identité du groupe.

### 6.1 Rappels

Dans un premier temps, nous allons rappeler quelques définitions utiles pour la suite de ce chapitre. Elles porteront essentiellement sur les idéaux binomiaux. Pour plus de renseignements sur ce sujet je donne un bon ouvrage d'introduction à ce domaine. Cet ouvrage [CJD91] contient les définitions de tous les outils que nous emploierons dans ce présent chapitre.

#### 6.1.1 Idéaux polynômiaux

Nous allons travailler dans ce chapitre avec des polynômes multivariés. Soient  $x_1, x_2, \dots, x_n$  des variables nous appellerons monôme un produit de ces variables de la forme

$$x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_n^{a_n}$$

avec  $a_i \in \mathbb{N}$ . Le degré total de ce monôme est  $\sum_{i=1}^n a_i$ . Par commodité nous représenterons un monôme par le vecteur de ses puissances  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ .

Nous noterons  $P$  un polynôme multivarié de  $\mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n]$ .

$$P = \sum_{i=1}^{\alpha} \beta_i M_i$$

avec  $M_i$  des monômes et  $\beta_i$  des coefficients dans  $\mathbb{Q}$ .  $\beta_i$  est le coefficient du monôme  $M_i$ . Si  $\beta_i \neq 0$  alors  $\beta_i M_i$  est un *terme* ou *sommant* du polynôme.

Un binôme est un polynôme ne contenant que deux sommants.  $B = \beta_1 M_1 + \beta_2 M_2$  avec  $M_1$  et  $M_2$  deux monômes. Un binôme sera dit pur si les deux coefficients des monômes sont  $-1$  ou  $1$ .

Nous appellerons idéal  $\mathcal{I}$  engendré par les polynômes  $P_1, P_2, \dots, P_\beta$  de  $\mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n]$  et nous noterons  $\mathcal{I} = \langle P_1, \dots, P_\beta \rangle$  l'ensemble :

$$\mathcal{I} = \{P \in \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n], P = \sum_{i=1}^{\beta} Q_i P_i\}$$

avec  $Q_i \in \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n]$ .

### 6.1.2 Ordre monomial

#### Définition

Trouver un générateur d'un réseau dans le cas monovarié revient à effectuer des divisions euclidiennes. Pour effectuer cette division il faut pouvoir classer les termes du polynôme par ordre décroissant en fonction de leur degré. Dans le cas multivarié, ce classement semble plus difficile dans le sens où il n'existe pas d'ordre canonique sur  $\mathbb{N}^n$ .

Ainsi, on appellera *ordre monomial* sur  $\mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n]$  une relation  $>$  sur  $\mathbb{N}^n$  telle que :

1.  $>$  est un ordre total sur  $\mathbb{N}^n$
2. Si  $\alpha > \beta$  et  $\gamma \in \mathbb{N}^n$  alors  $\alpha + \gamma > \beta + \gamma$ .
3.  $>$  est un bon ordre sur  $\mathbb{N}^n$  c'est à dire que tout sous ensemble de  $\mathbb{N}^n$  admet un plus petit élément par  $<$ .

Soit  $P$  un polynôme. On appellera  $LT(P)$  le plus grand monôme de  $P$  pour un ordre monomial donné.

#### Ordre lexicographique inverse (grevlex)

##### Définition 10. (ordre lexicographique inverse)

Soit  $\alpha$  et  $\beta$  deux éléments de  $\mathbb{N}^n$ . On dira que  $\alpha >_{\text{grevlex}} \beta$  si

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i > |\beta| = \sum_{i=1}^n \beta_i$$

ou  $\alpha = \beta$  et l'élément non nul le plus à droite dans le vecteur  $\alpha - \beta$  est négatif.

### 6.1.3 Division de polynômes multivariés

Muni de cet ordre, il est maintenant possible de parler de division de polynômes dans  $\mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n]$ . L'algorithme que nous donnons ici est tiré de [CJD91].

Soit un ordre monomial  $>$  sur  $\mathbb{N}^n$  et  $F = (f_1, f_2, \dots, f_s)$  un s-uplet ordonné de polynômes de  $\mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n]$ . Alors soit  $f$  un polynôme. On peut réécrire  $f$  en :

$$f = a_1 f_1 + \dots + a_s f_s + r$$

où  $a_i, r \in \mathbb{Q}[x_1, x_2, \dots, x_n]$  et soit  $r = 0$  soit  $r$  est un polynôme dont aucun des monômes n'est divisible par un  $LT(f_i)$ . On dira que  $r$  est le **reste** de la division de  $f$  par  $F$ . Si  $a_i f_i \neq 0$  alors  $\text{multideg}(f) \geq \text{multideg}(a_i f_i)$  où  $\text{multideg}(f)$  est le vecteur des degrés du plus grand monôme de  $f$ .

Cette division est l'extension de la division euclidienne pour des polynômes multivariés. Un algorithme de calcul est donné ci-dessous. Nous noterons  $\bar{f}^F$  le reste de la division de  $f$  par le s-uplet ordonné  $F$ .

```

Entrée :  $f_1, \dots, f_s, f$ 
Sortie :  $a_1, \dots, a_s, r$ 
-  $a_1 \leftarrow 0, \dots, a_s \leftarrow 0, r \leftarrow 0$ 
-  $p \leftarrow f$ 
- WHILE  $p \neq 0$  DO
  -  $i \leftarrow 1$ 
  -  $\text{division} \leftarrow \text{faux}$ 
  - WHILE  $i \leq s$  AND  $\text{division} = \text{faux}$  DO
    - SI  $LT(f_i) | LT(p)$  ALORS
      -  $a_i \leftarrow a_i + LT(p)/LT(f_i)$ 
      -  $p \leftarrow p - (LT(p)/LT(f_i))f_i$ 
      -  $\text{division} \leftarrow \text{vrai}$ 
    - SINON
      -  $i \leftarrow i + 1$ 
  - SI ( $\text{division} = \text{faux}$ ) ALORS
    -  $r \leftarrow r + LT(p)$ 
    -  $p \leftarrow p - LT(p)$ 

```

## 6.2 Base de Gröbner

### 6.2.1 Définition

Soit  $P$  un polynôme de  $\mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n]$ . Nous noterons  $LT(P)$  le terme dominant du polynôme pour l'ordre monomial grevlex choisi.

#### Définition 11. (Base de Gröbner)

Étant donné un ordre monomial, on dit qu'un ensemble fini  $G = \{g_1, \dots, g_t\}$  d'un idéal  $\mathcal{I}$  est une **base de Gröbner** si :

$$\langle LT(g_1), \dots, LT(g_t) \rangle = \langle LT(\mathcal{I}) \rangle$$

En pratique cela veut dire que pour tout élément  $g$  de l'idéal  $\mathcal{I}$ , il existe un élément  $g_i$  de  $\{g_1, \dots, g_t\}$  tel que le terme dominant  $LT(g)$  de  $g$  soit divisible par le terme dominant  $LT(g_i)$ . Cette remarque conduit tout naturellement à l'algorithme de Buchberger pour calculer une base de Gröbner d'un idéal engendré par une famille de polynômes.

Notons toutefois que dans le cas où  $F$  est un  $s$ -uplet de polynômes formant une base de Gröbner alors le reste de la division d'un polynôme par cet ensemble ne dépend pas de l'ordre des polynômes dans le  $s$ -uplet.

## 6.2.2 Algorithme de Buchberger

**Définition 12. (S-polynôme)** Soient  $f$  et  $g$  deux polynômes non-nuls de  $\mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n]$ . Soient alors  $\alpha$  (resp.  $\beta$ ) le vecteur des exposants du monôme le plus grand du polynôme  $f$  (resp.  $g$ ).

1. Notons  $\gamma$  le vecteur de  $\mathbb{N}^n$  tel que  $\gamma_i = \max(\alpha_i, \beta_i)$ .
2. Le  $S$ -polynôme de  $f$  et  $g$  est :

$$S(f, g) = \frac{\prod_{i=1}^n x_i^{\gamma_i}}{LT(f)} f - \frac{\prod_{i=1}^n x_i^{\gamma_i}}{LT(g)} g$$

Soit  $\mathcal{I} = \langle f_1, \dots, f_s \rangle \neq \{0\}$  un idéal de polynômes. Alors on peut construire une base de Gröbner pour cet idéal de la manière suivante :

**Algorithme de Buchberger**  
**Entrée :**  $F = (f_1, \dots, f_s)$   
**Sortie :** Une base de Gröbner  $G = (g_1, \dots, g_t)$  de  $\mathcal{I}$  avec  $F \subset G$

- $F \leftarrow G$
- **Repeat**
- $G' \leftarrow G$
- Pour  $\{p, q\} \in G'^2, p \neq q$  FAIRE
- $S \leftarrow \overline{S(p, q)}^{G'}$
- SI  $S \neq 0$  ALORS  $G \leftarrow G \cup \{S\}$
- **UNTIL**  $G = G'$

**Proposition 13.** Si  $\mathcal{I}$  est un idéal engendré par des binômes  $f_1, f_2, \dots, f_s$  alors les bases de Gröbner de cet idéal sont formées de binômes.

*Démonstration.* Cette proposition est une conséquence directe de l'algorithme de Buchberger pour calculer une base de Gröbner à partir d'un ensemble de polynômes.

Il suffit de montrer que  $\overline{S(p, q)}^{G'}$  est un binôme. Par définition du  $S$ -polynôme, si  $p$  et  $q$  sont deux binômes alors  $S(p, q)$  est aussi un binôme.

De même, l'algorithme de calcul de la division de polynôme appliqué au cas des binômes permet de conclure que le reste de la division sera aussi un binôme. En effet, soit deux binômes  $B = a_1 M_1 + a_2 M_2$  et  $B' = a'_1 M'_1 + a'_2 M'_2$  de monôme dominant  $a_1 M_1$  et  $a'_1 M'_1$ .

Supposons sans perte de généralités que  $a'_1 M'_1 | a_1 M_1$ . Alors la division de  $B$  par  $B'$  donne comme reste :

$$B'' = (a_1 M_1 / a'_1 M'_1) a'_2 M'_2 + a_2 M_2$$

$B''$  est bien un binôme.  $\square$

## 6.3 Idéal d'éboulement

### 6.3.1 Parallèle entre configurations et polynômes

Nous allons ici montrer le parallèle entre les configurations récurrentes et un ensemble de polynômes que l'on appellera polynômes d'éboulements.

Soit  $u = (u_1, \dots, u_n)$  une configuration du tas de sable sur un  $G = (V, E)$  à  $n$  sommets. Nous associerons à cette configuration un monôme  $x_u = x_1^{u_1} x_2^{u_2} \dots x_n^{u_n}$  de  $\mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n]$ .

À une relation d'éboulement  $\Delta_i$  on associe le binôme d'éboulement

$$T(x_i) = x_i^{d_i} - \prod_j x_j^{e_{i,j}} \quad (6.1)$$

Ainsi l'addition de deux configurations se traduit naturellement par la multiplication des deux monômes associés. L'éboulement du sommet  $i$  dans la configuration  $u$  se traduit par la division de  $x_u$  par  $x_i^{d_i}$  puis de la multiplication par  $\prod_{j=1}^n x_j^{e_{i,j}}$ .

**Lemme 11.** *Pour tout sommet  $i$  il existe un monôme  $M_i$  tel que*

$$M_i x_i - 1 \in \mathcal{I}_G$$

*Démonstration.* Ce lemme est vrai pour le puits  $n$ . Supposons maintenant que le lemme est vrai pour tous les sommets à distance plus petite ou égale à  $k$ . Soit maintenant un sommet  $j$  à distance  $k+1$  du puits. Par connexité du graphe ce sommet est relié à un sommet  $l$  à distance  $k$  du puits. Par hypothèse de récurrence il existe un monôme  $M_k$  tel que  $M_k x_k - 1 \in \mathcal{I}_G$ .

Par stabilité de l'idéal par multiplication on a  $M_k^2 x_k^2 - M_k x_k \in \mathcal{I}_G$ . En soustrayant ces deux relations on obtient  $M_k^2 x_k^2 - 1 \in \mathcal{I}_G$ . Par récurrence  $M_k^{d_k} x_k^{d_k} - 1 \in \mathcal{I}_G$ . Or l'équation d'éboulement du sommet  $k$  s'écrit

$$x_k^{d_k} - x_j^{e_{k,j}} \prod_{l \neq j} x_l^{e_{k,l}}$$

Par multiplication par  $M_k^{d_k}$  et soustraction avec l'équation précédente, on obtient alors :

$$x_j M_k^{d_k} x_j^{e_{k,j}-1} \prod_{l \neq j} x_l^{e_{k,l}} - 1 \in \mathcal{I}_G$$

$\square$

**Lemme 12.** Soit  $M$  un monôme et  $P$  un polynôme. Alors

$$MP \in \mathcal{I}_G \Rightarrow P \in \mathcal{I}_G$$

*Démonstration.* Décomposons  $M$  en  $M = \prod_{j \in I} x_j$  où  $I$  est un multi-ensemble. Soit  $k \in I$ .  $M = x_k M'$ . Par le lemme précédent il existe  $M_k$  tel que  $x_k M_k - 1 \in \mathcal{I}_G$ . Donc  $(x_k M_k M' - M')P \in \mathcal{I}_G$ . Comme  $MP \in \mathcal{I}_G$ ,  $x_k M' M_k P \in \mathcal{I}_G$  aussi. Par soustraction on a  $M'P \in \mathcal{I}_G$  où  $M'$  contient un terme de moins que  $M$ . Ainsi par récurrence on obtient le résultat voulu.  $\square$

**Proposition 14.** Deux configurations  $u$  et  $v$  sont équivalentes par  $\equiv$  si et seulement si  $x_u - x_v \in \mathcal{I}_G$  ou de manière équivalente  $u - v \in \Delta$ .

*Démonstration.* Une preuve algébrique est donnée dans l'article [CRSed] utilisant l'article [MM82].

L'utilisation partielle du dernier article nous incite néanmoins à donner ici une preuve plus complète et indépendante de référence.

Soit  $u$  et  $v$  telles que  $x_u - x_v \in \mathcal{I}_G$ . Donc

$$x_u - x_v = \sum P_i(X)T(x_i) \quad (6.2)$$

$$= \sum m_i T(x_i) \quad (6.3)$$

Par identification, il y a un monôme de la somme égal à  $x_u$ . Ce monôme est obligatoirement un monôme de  $m_i T(x_i)$  pour un sommet  $i$  donné. Soit  $w$  la configuration issue de  $u$  par éboulement du sommet  $i$ . On a alors  $x_u - x_w = m_i T(x_i)$ . On peut donc maintenant réécrire la somme précédente en :

$$x_u - x_v = \sum P_j T(x_j)$$

avec  $j$  différent de  $i$ .

On a ainsi éliminé un monôme de la somme. Par élimination successive on arrive à rendre la somme nulle tout en ne réalisant qu'un éboulement à chaque étape.

Réciproquement, supposons que  $u - v \in \Delta$ . Alors on peut écrire la différence  $u - v$  comme :

$$u - v = \sum \lambda_i \Delta_i$$

Supposons que  $u = v + \Delta_i$ . Alors  $x_u x_i^{d_i} = x_v \Pi_v$  où  $\Pi_v = \prod_{j \in V} x_j^{e_{i,j}}$ .

Ainsi on obtient  $(x_u - x_v)x_i^{d_i} = x_v(\Pi_v - x_i^{d_i})$  Or  $\Pi_v - x_i^{d_i} = -T(x_i)$  donc appartient à  $\mathcal{I}_G$ . Par le lemme de divisibilité 12, on déduit que  $x_u - x_v \in \mathcal{I}_G$ .

Il reste maintenant à considérer le cas où la somme contient plusieurs termes.

$$u - \sum_{i \in I} \Delta_i = v - \sum_{i \in J} \Delta_j$$

où  $I$  et  $J$  sont des multi-ensembles. Le premier terme de l'égalité s'écrit  $u + \Delta_{i_1} + \Delta_{i_2} + \dots + \Delta_{i_k}$ . On définit  $u_1 = u - \Delta_1$  et plus généralement  $u_k = u_{k-1} - \Delta_k$ .

Par la preuve ci-dessus on montre que  $u_k - u_{k+1} \in \mathcal{I}_G$ . Or si  $u_k - u_{k+1} \in \mathcal{I}_G$  et  $u_{k+1} - u_{k+2} \in \mathcal{I}_G$  alors par sommation et stabilité de l'idéal par somme on obtient  $u_k - u_{k+2} \in \mathcal{I}_G$ . Finalement  $u - v \in \mathcal{I}_G$ .  $\square$

Nous avons vu que le nombre de classes d'équivalence de la relation  $\equiv$  est égal au nombre de configurations récurrentes. Par ([CJD91] Chap. 5), le parallèle de cette relation en terme de polynômes est que ce nombre est aussi la dimension du  $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel  $\mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n]/\mathcal{I}_G$ .

Ainsi, étant donnée une base de Gröbner de cet idéal, il y a autant de monômes irréductibles dans l'idéal par cette base que de configurations récurrentes sur le graphe  $G$ .

### 6.3.2 Éboulement d'un ensemble de sommets

Précédemment, nous avons étudié le cas de l'éboulement d'un sommet unique. Or, on peut considérer l'éboulement parallèle d'un ensemble de sommets. Cela revient à faire diminuer le nombre de grains sur les sommets à la frontière de cet ensemble du nombre d'arcs sortants et de faire augmenter le nombre de ceux qui sont voisins de l'ensemble.

Pour un sommet  $i \in V$  nous allons définir

$$d_i(X) = \sum_{j \in X} e_{i,j}$$

$d_i(X)$  est le nombre d'arêtes d'origine  $i$  ayant comme seconde extrémité un sommet de  $X$ . Ainsi si  $i \in X$   $d_i(\overline{X})$  ( $\overline{X}$  désigne le complémentaire de  $X$  dans  $V$ ) est le degré sortant de  $i$  dans  $X$ . Si  $i \notin X$   $d_i(X)$  est le degré rentrant de  $i$  dans  $X$ .

Ainsi l'éboulement de l'ensemble de sommets  $X$  pour la configuration  $u$  revient à l'ajout du vecteur  $\Delta_X$  à  $u$  où :

$$(\Delta_X) = \begin{cases} -d_i(\overline{X}), & \text{pour } i \in X \\ d_i(X), & \text{pour } i \in \overline{X} \end{cases}$$

De manière équivalente à la translation de l'éboulement d'un sommet nous définissons le polynôme d'éboulement d'un ensemble de sommets  $X$  par :

$$T(X) = \prod_{i \in X} x_i^{d_i(\overline{X})} - \prod_{i \in \overline{X}} x_i^{d_i(X)} \quad (6.4)$$

Cette définition est cohérente avec le cas du sommet unique car en prenant  $X = \{x_i\}$  on s'aperçoit que l'on retrouve l'équation 6.1.

## 6.4 Bases de Gröbner de l'idéal d'éboulement

Pour le calcul d'une base de Gröbner il est nécessaire de se munir d'un ordre monomial. L'ordre monomial que nous choisissons est l'ordre lexicographique inverse (grevlex) sur les

sommets  $x_1, \dots, x_n$ . Mais nous procédons avant à une renumérotation des sommets de sorte que  $n$  soit toujours le puits mais que les autres sommets soient numérotés suivant l'inverse de la distance par rapport au puits. Si deux sommets sont à même distance du puits, alors on choisira indépendamment l'un ou l'autre ordonnancement.

Ainsi le sommet 1 est le sommet le plus éloigné du puits et le sommet  $n - 1$  est un sommet à distance 1 du puits.

Muni de cet ordre que nous appellerons ordre d'éboulement, nous remarquons que l'ordre respecte les relations d'éboulement  $\Delta_i$  avec  $i \in \{1, \dots, n - 1\}$ .

En effet, soit  $u$  une configuration et  $M_u$  son monôme associé. Alors l'éboulement d'un ensemble  $X$  de sommets ne contenant pas le puits conduit à la configuration  $v$  de monôme associé  $M_v$ . Il est alors trivial de voir que  $M_u >_{\text{grevlex}} M_v$  car  $v = u - \sum_{j \in X} \Delta_j$ . Soit  $i_0$  un sommet de  $X$  à distance minimale du puits.  $i_0$  a comme voisin le sommet  $j_0$  qui est strictement plus près du puits que le sommet  $i_0$ . Comme le nombre de grains sur le sommet  $j_0$  est plus grand dans la configuration  $v$  que dans la configuration  $u$  et que tous les sommets  $j > j_0$  ont aussi un nombre de grains plus grand ou égal dans  $v$  que dans  $u$ , alors on a l'inégalité sur les monômes par la définition même de l'ordre.

De plus par la même démonstration on voit que dans  $T(X)$  le premier monôme comportant des sommets de  $X$  est plus grand que le second monôme comportant des sommets de  $\bar{X}$ .

### 6.4.1 Base de Gröbner de l'idéal

Nous allons montrer dans cette partie le principal théorème de ce chapitre.

**Théorème 16.** *Une base de Gröbner de l'idéal  $\mathcal{I}_G$  pour l'ordre monomial d'éboulement est donné par :*

$$\mathcal{T} := \{T(X), X \subset \{1, \dots, n - 1\}\} \cup \{x_n - 1\} \tag{6.5}$$

*Démonstration.* Dans un premier temps nous allons montrer que les éléments de  $\mathcal{T}$  engendrent bien  $\mathcal{I}_G$ . Ensuite nous allons montrer que pour tous polynômes  $p, q$  de  $\mathcal{T}$ , le S-polynôme  $S(p, q)$  se réduit à 0 par  $\mathcal{T}$ . Nous nous efforcerons de donner des preuves combinatoires de ces résultats en interprétant en termes de graphe les différentes opérations liées au calcul de la base de Gröbner.

Comme  $\mathcal{T}$  contient les générateurs de  $\mathcal{I}_G$ , l'idéal engendré par  $\mathcal{T}$  contient  $\mathcal{I}_G$ . L'inclusion inverse provient du lemme suivant :

**Lemme 13.** *On peut engendrer les polynômes d'éboulement d'ensemble de sommets à partir des polynômes d'éboulement de sommets uniques. En conséquence  $\mathcal{T} \subset \mathcal{I}_G$ .*

*Démonstration.* Ce lemme paraît une trivialité mais il faut voir que la difficulté réside dans le fait que l'on travaille sur des polynômes.

Soit  $X \subset G$ , il suffit de remarquer que :

$$\Delta_X = \sum_{j \in X} \Delta_j$$

En effet, en regardant la  $i^{\text{ème}}$  coordonnée des deux termes, on retrouve la définition de  $\Delta(X)$ .

$$\begin{cases} -d_I(\overline{X}) = -d_i + \sum_{j \in X} e_{i,j}, & \text{si } i \in X \\ d_i(X) = \sum_{j \in X} e_{i,j} \end{cases}$$

La conclusion de la preuve vient de la proposition 14.  $\square$

Il reste maintenant à démontrer la deuxième partie du théorème sur le S-polynôme. Cette preuve repose sur le lemme suivant :

**Lemme 14.** *Soient  $X$  et  $Y$  deux sous-ensembles de  $G$ . Soit une configuration  $u$ , alors ébouler  $X$  puis  $Y \setminus X$  ou  $Y$  puis  $X \setminus Y$  conduit à la même configuration finale. De plus si  $u \geq 0$ ,  $u + \Delta(X) \geq 0$  et  $u + \Delta(Y) \geq 0$  alors  $u + \Delta(X) + \Delta(Y \setminus X) \geq 0$ .*

*Démonstration.* La première partie du lemme consiste à prouver que

$$\Delta(X) + \Delta(Y \setminus X) = \Delta(Y) + \Delta(X \setminus Y)$$

Pour montrer cette égalité nous considérons la  $i^{\text{ème}}$  coordonnée de chacun des deux termes en séparant les 4 cas suivants :

$$\begin{array}{lll} d_i(\overline{Y}) + d_i(Y \setminus X) = & d_i(\overline{X \cap Y}) = d_i(\overline{X}) + d_i(X \setminus Y), & i \in X \cap Y, \\ d_i(X) + d_i(Y \setminus X) = & d_i(X \cup Y) = d_i(Y) + d_i(X \setminus Y), & i \in \overline{X \cup Y}, \\ d_i(Y) - d_i(Y \setminus X) = & d_i(X \cup Y) = d_i(\overline{X}) - d_i(\overline{X \setminus Y}), & i \in X \setminus Y, \end{array}$$

Le cas  $i \in Y \setminus X$  est obtenue par symétrie du cas précédent.

La positivité des termes nous est assurée par les inégalités suivantes :

$$\begin{array}{lll} i \in X \cap Y, u_i - d_i(\overline{X}) + d_i(Y \setminus X) & \geq u_i - d_i(\overline{X}) & \geq 0 \\ i \in \overline{X \cup Y}, u_i + d_i(X) + d_i(Y \setminus X) & & \geq 0 \\ i \in X \setminus Y, u_i - d_i(\overline{X}) + d_i(Y \setminus X) & \geq u_i - d_i(\overline{X}) & \geq 0 \\ i \in Y \setminus X, u_i + d_i(X) - d_i(\overline{Y \setminus X}) & = u_i - d_i(\overline{Y}) & \geq 0 \end{array}$$

$\square$

Grâce à ce lemme nous allons pouvoir démontrer que le S-polynôme de deux polynômes de  $\mathcal{T}$  se réduit à 0 par les différents éléments de  $\mathcal{T}$ .

Pour cela soit  $X$  et  $Y$  deux ensembles de sommets ne contenant pas le puits. Soient  $T(X)$  et  $T(Y)$  leurs polynômes d'éboulement :

$$\begin{aligned} T(X) &= B(X) - W(X) \\ T(Y) &= B(Y) - W(Y) \end{aligned}$$

de sorte que  $B(X)$  et  $B(Y)$  soient les monômes dominants des deux polynômes.

Le S-polynôme de  $T(X)$  et  $T(Y)$  noté  $S = S(T(X), T(Y))$  est obtenu par la multiplication de  $T(X)$  et de  $T(Y)$  par deux monômes  $m(X)$  et  $m(Y)$  respectivement de sorte que  $B(X)m(X) = B(Y)m(Y)$ . Ainsi

$$S = m(X)W(X) - m(Y)W(Y)$$

En notant  $u$  la configuration correspondant à  $m(X)B(X)$  on remarque que  $u$  est une configuration où  $X$  et  $Y$  peuvent s'écrouler.  $m(X)W(X)$  correspond à cette même configuration  $u$  après écroulement de  $X$ . De même  $m(Y)W(Y)$  est la configuration obtenue après écroulement de  $Y$  dans  $u$ .

Supposons que  $m(X)W(X)$  soit le monôme dominant de  $S$ , l'autre cas étant symétrique. Réduisons alors  $S$  par  $T(Y \setminus X)$ . Ceci est possible car le monôme dominant de  $T(Y \setminus X)$  divise celui de  $S$ . On obtient alors un monôme  $m'$  résultant de l'écroulement consécutif de  $X$  puis de  $Y \setminus X$  dans  $u$ .

Après cette réduction, le monôme  $m(Y)W(Y)$  devient dominant. Par réduction par  $T(X \setminus Y)$ , le lemme 14 nous assure que le résultat est le même monôme  $m'$ .

Ainsi le S-polynôme se réduit bien à 0.

Pour finir la preuve du théorème, il reste seulement à considérer le cas où on calcule le S-polynôme de  $T(X)$  et  $x_n - 1$ . Il est facile de vérifier alors que le S-polynôme se réduit à 0. Cela vient du premier critère de Buchberger qui assure que le S-polynôme de deux polynômes de termes dominants premiers entre eux se réduit à 0. □

## 6.4.2 Base de Gröbner minimale

Dans le théorème 16, nous avons exhibé une base de Gröbner de notre idéal. Malheureusement cette base contient  $2^{n-1}$  éléments où  $n$  est le nombre de sommets du graphe. Ce nombre est dans la pratique trop élevé pour se permettre de calculer intégralement l'ensemble des polynômes de la base.

On peut en revanche essayer de calculer la base de Gröbner réduite de cet idéal. Malheureusement le cas paraît trop complexe. Un cas intermédiaire est le calcul d'une base minimale. Rappelons qu'une base de Gröbner est dite **minimale** si ses éléments ont comme coefficient 1 et qu'aucun monôme dominant ne divise un autre monôme dominant.

**Définition 13.** *On dira qu'un sous-ensemble  $X$  de sommets d'un graphe  $G = (V, E)$  est **doublement connexe** si les sous-graphes induits par  $X$  et  $\overline{X}$  sont connexes.*

**Théorème 17.** *L'ensemble  $S_c$  des polynômes d'écroulement correspondant aux sous-ensembles  $X \subset \{1, \dots, n-1\}$  doublement-connexes de  $G$  et du polynôme  $\{x_n - 1\}$  est une base de Gröbner minimale pour l'ordre d'écroulement.*

*Démonstration.* La preuve de ce théorème se réalise en enlevant successivement à  $\mathcal{T}$  les éléments dont le monôme dominant divise un autre monôme dominant de  $\mathcal{T}$ .

Soit  $X$  un ensemble qui n'est pas doublement-connexe. Nous allons montrer que  $T(X)$  peut être enlevé de  $\mathcal{T}$ .

1. Si  $X$  n'est pas connexe, alors  $X$  se décompose en un ensemble de composantes connexes  $C_k$ . Pour chaque  $C_k$  le monôme dominant de  $T(C_k)$  divise celui de  $T(X)$  car  $d_i(\overline{C_k}) = d_i(\overline{X})$  pour tout  $i \in C_k$ .
2. Sinon  $\overline{X}$  n'est pas connexe. Donc une de ses composantes que l'on notera  $C$  ne contient pas le puits  $n$ . Alors le monôme dominant de  $T(X \cup C)$  divise celui de  $T(X)$  car pour tout  $i \in X$ , l'inclusion  $\overline{X \cup C} \subset \overline{X}$  entraîne que  $d_i(\overline{X \cup C}) \leq d_i(\overline{X})$ , alors que pour  $i \in C$  on a  $d_i(\overline{X \cup C}) = 0$ .

Il reste maintenant à montrer qu'on ne peut pas enlever de polynômes correspondant à un polynôme d'éboulement d'un ensemble doublement-connexe. Pour cela, soient  $X$  et  $Y$  deux éléments de  $S_c$ , supposons que le monôme dominant de  $T(Y)$  divise celui de  $T(X)$ , nous allons montrer que soit  $Y \subset X$  et donc que le sous-graphe induit par  $X$  n'est pas connexe, soit  $Y \not\subset X$  et le sous-graphe induit par  $\overline{X}$  n'est pas connexe. Dans ces deux cas on aura donc une contradiction avec le fait que les ensembles sont doublement-connexes.

1. Si  $Y \subset X$ , alors pour tout  $i \in Y$ , comme les monômes dominants se divisent  $d_i(\overline{Y}) \leq d_i(\overline{X})$  de sorte que les voisins de  $i$  dans  $\overline{Y}$  sont aussi dans  $\overline{X}$ . Donc il n'y a pas d'arêtes entre un sommet de  $Y$  et un sommet de  $X \setminus Y$  et donc le sous-graphe induit par  $X$  n'est pas connexe.
2. Si  $Y \not\subset X$ , alors la division des monômes dominants entraîne que pour tout  $i \in Y \setminus X$ ,  $d_i(\overline{Y}) = 0$ . Donc il n'y a pas d'arêtes entre  $Y \setminus X$  et  $\overline{X} \setminus Y$  ensemble non-vide car contenant au moins le puits. Ainsi, le graphe induit par  $\overline{X}$  n'est pas connexe.

□

Remarquons néanmoins que le nombre de polynômes dans une base minimale peut aussi être de  $2^{n-1}$  dans le cas du graphe complet où tous les sous-ensembles de sommets sont doublement-connexes.

## 6.5 Monômes irréductibles et configurations récurrentes

Nous avons vu précédemment que le quotient  $\mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n]/\mathcal{I}_G$  est un  $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel d'ordre le nombre de configurations récurrentes du graphe sous-jacent  $G$ . À un ordre monomial fixé, on peut calculer une base de Gröbner de l'idéal  $\mathcal{I}_G$ , et une base de notre espace vectoriel est donné par l'ensemble des monômes qui ne se réduisent pas par la base. On appellera ces monômes *monômes irréductibles*. Dans cette partie, nous allons donner une bijection simple entre les monômes irréductibles pour l'ordre d'éboulement et les configurations récurrentes du graphe. Puis nous montrerons que les opérations d'addition de configurations et de calcul de l'identité peuvent être interprétés en terme de réduction de polynômes et de calcul dans  $\mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n]/\mathcal{I}_G$ .

### 6.5.1 Définition de la bijection

Soit  $\delta = (d_1 - 1, \dots, d_n - 1)$  et  $\Phi$  l'application allant de l'ensemble des configurations stables dans lui-même définie par :

$$\Phi(u) = \delta - u$$

Nous étendrons la définition de  $\Phi$  à un monôme de manière naturelle en notant  $\Phi(M) = \Phi(a_1 \cdots a_n)$  pour un monôme  $M = x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}$ .

**Théorème 18.** *La fonction  $\Phi$  définit une bijection entre l'ensemble des monômes irréductibles pour l'ordre d'éboulement et l'ensemble des configurations récurrentes.*

*Démonstration.* Comme le nombre de monômes irréductibles est égal à l'ordre du groupe des configurations récurrentes, il suffit de montrer que pour tout monôme irréductible  $M$ ,  $\Phi(M)$  est récurrent.

Néanmoins il s'avère qu'une preuve combinatoire peut être réalisé pour les deux sens de la démonstration prouvant ainsi sans apport algébrique que  $\Phi$  est une bijection. Nous donnerons donc aussi cette preuve réciproque.

Soit  $M$  un monôme. Supposons que  $u = \Phi(M)$  ne soit pas récurrente. Considérons maintenant  $v = u + \beta$ . En éboulant la configuration  $v$  on obtient la configuration  $\hat{v}$  mais dans cette série d'éboulements un ensemble  $X$  non vide de sommets ne se sont pas éboulés. Soit  $j \in X$ , comme ce sommet est stable dans  $\hat{v}$ , on a  $\hat{v}_j \leq d_j - 1$ . Mais dans la suite d'éboulements menant de  $v$  à  $\hat{v}$ ,  $j$  a reçu exactement  $d_j(\overline{X})$  grains de sable, c'est à dire le nombre de sommets qui s'éboulent et qui sont reliés à  $j$ . Ainsi on a  $v_j \leq d_j - 1 - d_j(\overline{X})$ . D'autre part si on note  $B(X)$  le monôme dominant de  $T(X)$  alors on a :

$$w = \Phi(B(X)) = (d_1 - 1 - d_1(\overline{X}), \dots, d_n - 1 - d_n(\overline{X}))$$

$w$  contient donc plus de grains que  $u$  sur les cellules de  $X$ . Cela implique que  $\Phi^{-1}(w) \mid M$ . Cela est absurde de par l'irréductibilité de  $M$ .

Par égalité entre le nombre de configurations récurrentes et le nombre de monômes irréductibles on peut conclure quant à la démonstration du théorème. Donnons néanmoins l'autre preuve.

Maintenant prenons  $u$  une configuration récurrente et montrons que  $\Phi^{-1}(u)$  est un monôme irréductible. Supposons que  $\Phi^{-1}(u)$  est réductible. Cela veut dire qu'il existe un monôme de la base qui divise  $\Phi^{-1}(u)$ . Par définition des monômes dominants de la base il existe un ensemble  $X$  de sommets tel que  $B(X) \mid \Phi^{-1}(u)$ . Par application de  $\Phi$  on obtient que  $\Phi_i(B(X)) \geq u$ . Or  $\Phi(B(X))$  n'est pas récurrente car les sommets de  $X$  n'ont pas suffisamment de grains de sable. Donc  $u$  n'est pas récurrente ce qui contredit notre hypothèse. □

### 6.5.2 Opération de groupe

Soit  $u$  une configuration, notons  $\rho(u)$  la configuration réduite obtenue à partir du monôme associé à  $u$  en réalisant toutes les réductions possibles dans la base de Gröbner

de l'idéal  $\mathcal{I}_G$ . Nous donnons ici une interprétation du calcul de l'identité du groupe et de l'addition de deux éléments en terme de réduction de polynômes.

**Proposition 15.** *Si  $u$  est une configuration alors la configuration récurrente associée à  $u$  est  $\Phi(\rho(\Phi(\rho(u))))$ . L'identité du groupe des configurations récurrentes est  $\Phi(\rho(\delta))$ .*

*Démonstration.* Pour toute configuration  $u$ ,  $\rho(u)$  est une configuration équivalente à  $u$ . Par le théorème 18,  $\Phi(\rho(v))$  est une configuration récurrente pour toute configuration  $v$ . Cette configuration est équivalente par  $\equiv$  à  $\Phi(v)$ . Comme  $\Phi$  est une involution, en prenant  $v = \Phi(\rho(u))$  on montre la première partie du théorème.

Pour le calcul de l'identité, il suffit de remarquer que l'identité est la configuration récurrente équivalent par  $\equiv$  à la configuration nulle 0. Or  $\Phi(\rho(0)) = \delta$ .

□

**Corrolaire 4.** *Si  $u$  et  $v$  sont deux configurations récurrentes alors :*

$$u \oplus v = \Phi(\rho(\Phi(u) + \Phi(v)))$$

### 6.5.3 Application au calcul effectif de l'identité

La dernière proposition 15 nous permet de donner un nouvel algorithme de calcul de l'identité. En réalité, une interprétation possible de cette proposition est de dire que l'on sait partir d'une configuration négative et retrouver la configuration récurrente associée.

Nous avons vu précédemment que l'on pouvait partir d'une configuration fortement positive (supérieure à une configuration récurrente) et il suffit alors de réaliser les éboulements possibles pour retrouver la configuration récurrente associée. Ici, nous partons d'une configuration négative qui devient un monôme par  $\Phi$  puis grâce à la réduction dans l'idéal qui n'est autre que réaliser des éboulement parallèles, on peut retrouver la configuration récurrente associée.

Le problème dans cet algorithme est évidemment de retrouver le polynôme par lequel le monôme peut être réduit. Mais ici l'algorithme de combustion permet de donner ce polyomino. En effet, en prenant la configuration associée au monôme, ajoutons-y  $\beta$  et ébouillons cette nouvelle configuration. Soit tous les sommets s'ébouillent ce qui montre que notre configuration est récurrente soit une partie de la configuration ne s'ébouille pas et cette partie représente alors l'ensemble de sommets à considérer pour trouver le polynôme d'éboulement qui permettra de réduire notre monôme.

Nous obtenons ainsi l'algorithme suivant :

Configuration  $u = \delta$ .  
 Tant que  $\Phi(u)$  non récurrent :  
 –  $v = u + \beta$   
 – Soit  $X$  l'ensemble des sommets ne s'ébouyant pas pendant la relaxation de  $v$ .  
 – Réduire le monôme  $M_u$  par  $T(X)$  pour obtenir le monôme  $M'$ .  
 – Prendre comme nouveau  $u$  la configuration associée au monôme  $M'$ .

Cet algorithme est non-optimal du à la détermination du polyomino  $X$ . Il serait possible d'envisager une méthode du style suivi de contours pour déduire du polyomino  $X$  le polyomino qui sera utilisé à l'itération suivante. Ce système permettrait un gain de temps pour cette phase qui est la plus coûteuse au point de vue temps de calcul.

Pour le montrer nous représentons ci-dessous le nombre de fois ou un sommet  $v$  apparaît sur le bord du polyomino réducteur dans le cas du calcul de l'identité sur la grille 100 par 100.

Dans cette figure le blanc représente moins de 10 éboulements tandis que le noir entre 80 et 90.

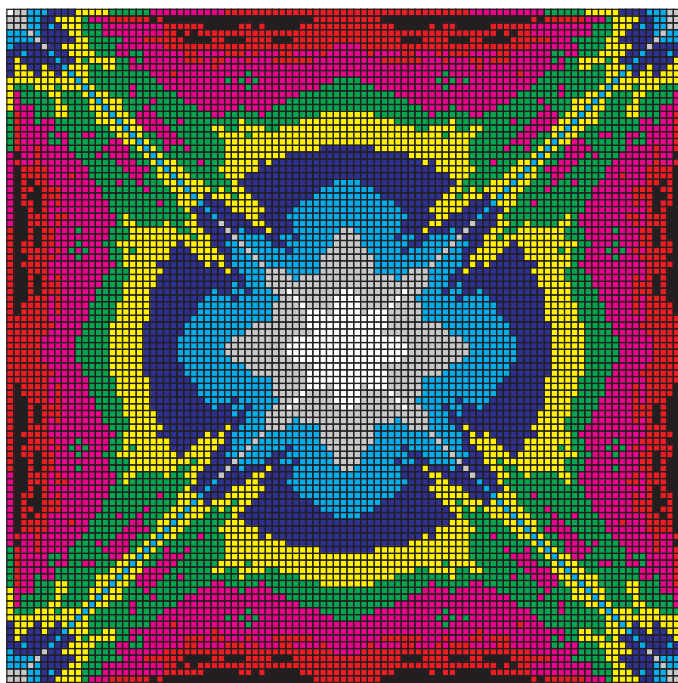


FIG. 6.1 – Nombre d'éboulements dans le calcul de l'identité de la grille 100 par 100

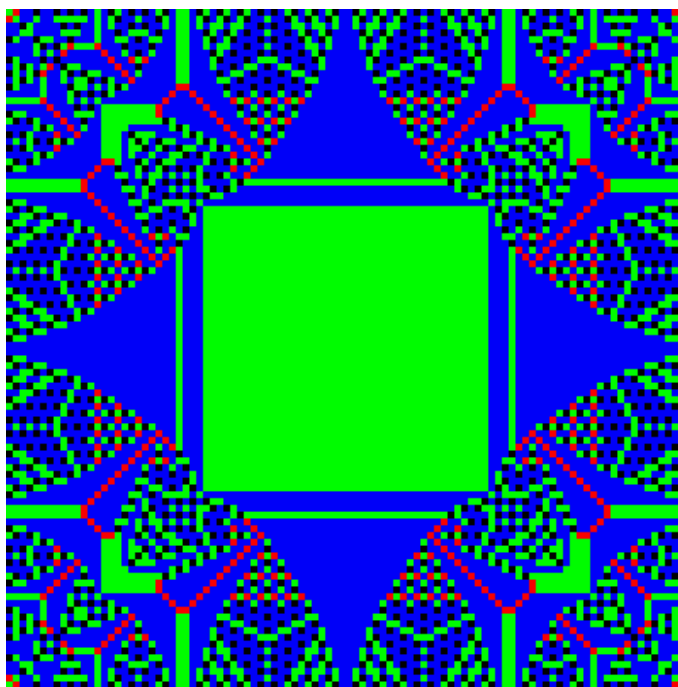


FIG. 6.2 – Identité 100 par 100

#### 6.5.4 Exemple sur un graphe à 4 sommets

Considérons le graphe suivant :

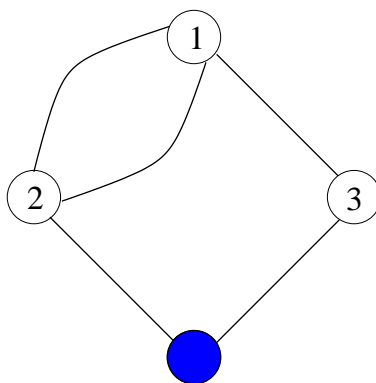


FIG. 6.3 – Calcul effectif de la base sur un exemple

Dans cette figure, nous avons numéroté les sommets de manière à respecter l'ordre d'éboulement.

Le système de polynômes d'éboulements des sommets s'écrit alors :

$$S' := \{x_1^3 - x_2^2 x_3, x_2^3 - x_1^2 x_4, x_3^2 - x_1 x_4, x_4^2 - x_2 x_3, x_4 - 1\}$$

Le calcul effectif de la base de Grobner réduite nous donne le résultat suivant :

$$B = [x_4 - 1, x_3^2 - x_1, x_2^3 - x_1^2, x_1^3 - x_2, x_2x_3 - 1, x_2x_1 - x_3, x_3x_1^2 - x_2^2]$$

Il est facile de vérifier que le monôme dominant de chaque polynôme dans la base est égal au monôme dominant d'un polynôme d'éboulement d'un ensemble de sommets.

Par exemple le polynôme  $x_3x_1^2 - x_2^2$  a comme monôme dominant  $x_3x_1^2$  correspondant au monôme dominant du polynôme d'éboulement de l'ensemble de sommets  $\{1, 3\}$ .

Une manière de représenter une base de Grobner est de se placer dans  $\mathcal{R}^n$  et de représenter chaque monôme dominant par un point.

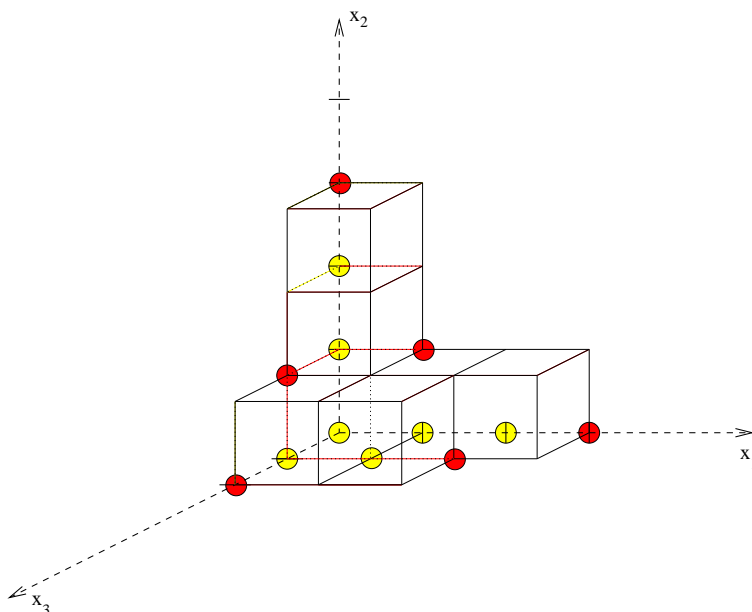


FIG. 6.4 – Représentation d'une base de Grobner

Dans cette représentation, il est facile de repérer les monômes irréductibles qui sont repérés par des points strictement intérieurs à l'escalier comme le montre la figure précédente.

À l'aide de la décomposition de Smith du groupe associé au graphe précédent, il est immédiat que ce groupe est cyclique, isomorphe à  $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ . On vérifie par ailleurs aisément que le nombre de points sous l'escalier est bien 7.

Pour calculer l'identité de ce groupe nous considérons le monôme associé à la configuration  $\delta$  c'est à dire le monôme  $x_1^2x_2^2x_3$ .

Nous réduisons maintenant ce monôme par le polynôme d'éboulement associé aux sommets  $\{1, 2\}$ . Ce polynôme est  $x_1x_2 - x_3$ . La réduction nous conduit donc au monôme  $x_1x_2x_3^2$ . Nous réduisons ensuite par le polynôme d'éboulement associé à  $\{1, 2, 3\}$  c'est à dire  $x_2x_3 - 1$ . Nous obtenons ainsi le monôme  $x_1x_3$  qui se trouve être irréductible par la base.

Une autre méthode de réduction pour le monôme serait de prendre le monôme  $x_1^2x_2^2x_3$  et de le réduire par le polynôme d'éboulement de  $\{1, 3\}$  qui est  $x_1^2x_3 - x_2^2$ . Cette réduction

donne le monôme  $x_2^4$ . Réduisons ensuite par  $x_2^3 - x_1^2$  -polynôme d'éboulement de  $\{2\}$ , pour obtenir  $x_1^2 - x_2$ . Finalement, réduisons par  $x_1x_2 - x_3$  et nous obtenons  $x_1x_3$ .

Ces deux réductions sont représentées sur la figure ci-dessous. Nous voyons que quel que soit l'ordre choisi pour réaliser les réductions le résultat choisi est le même. Remarquons que si une configuration est réductible par  $X_1$  et par  $X_2$  alors la réduction par  $X_1$  peut amener à une configuration qui n'est plus réductible par  $X_2$ . Ce résultat de convergence provient du fait que les polynômes d'éboulements forment une base de Gröbner.

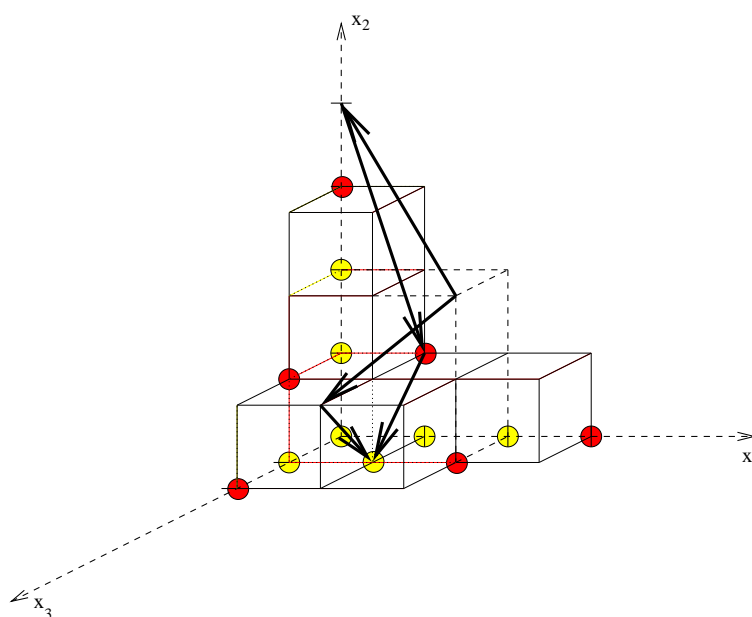


FIG. 6.5 – Deux types possibles de réduction pour le calcul de l'identité

Pour trouver effectivement l'identité il suffit ensuite d'appliquer la bijection  $\Phi$  au monôme obtenu et on obtient la configuration  $(1, 2, 0)$ . Il est facile de vérifier que cette configuration est récurrente et égale à l'identité.

### 6.5.5 Exemple sur la grille $3 \times n$

Nous allons maintenant travailler sur le calcul de l'identité de la grille  $3 \times n$ . Les figures ci-dessous montrent les différentes réductions réalisées sur le monôme associé à la configuration  $\delta$ . La dernière figure montre l'identité sur la grille. Remarquons que la structure de l'identité ne dépend pas de  $n$ . Pour plus de renseignements sur l'identité, un chapitre y est consacré. Pour les grilles rectangulaires voir [RLB00].

3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3

4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4

1	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	1
3	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	3
1	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	1

2	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	0	2
3	3	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	3	3
2	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	0	2

3	2	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	2	3
0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0
3	2	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	2	3

0	1	3	2	2	2	2	2	2	2	2	3	1	0
3	2	3	2	2	2	2	2	2	2	2	3	2	3
0	1	3	2	2	2	2	2	2	2	2	3	1	0

FIG. 6.6 – Calcul de l'identité sur des grilles rectangulaires

# Chapitre 7

## Le jeu du caillou

Ce chapitre est consacré à l'étude du jeu du caillou (ou *pebble game*) dont les règles sont changées en celles de l'automate cellulaire du Tas de Sable.

Nous montrerons plus précisément que le nombre minimum de cailloux nécessaires avec de telles règles sur un graphe  $G$  est égal au nombre de sommets du graphe moins le nombre maximal de sommets indépendants du graphe  $G^2$ . Or trouver un tel nombre est un problème NP-complet. [YLSS95]

### 7.1 Introduction

Ce chapitre ne porte plus sur l'étude du groupe du Tas de Sable mais simplement sur les règles de l'automate cellulaire. Nous traitons ici un problème d'optimisation sur les graphes. De très nombreux problèmes de cette sorte apparaissent naturellement : le problème de la domination romaine [CDHS],[Ste99] en est un bon exemple. Soit un graphe dont les nœuds représentent des garnisons romaines. L'idée est de répartir au mieux ses troupes dans les garnisons en respectant les règles suivantes :

- Si aucune troupe n'est stationnée dans une garnison alors il y a forcément deux troupes de stationnées dans une garnison voisine.
- Si une troupe est stationnée dans une garnison alors cette garnison est sûre.

Ce principe a été appliqué par l'empereur constantin le Grand au  $IV^{\text{ème}}$  siècle.

Le problème est de trouver le nombre minimal de troupes nécessaires pour sécuriser toutes les garnisons.

Il existe de nombreuses variantes à ce problème avec de petits changements de règles du jeu. Nous nous intéressons ici à ce problème en utilisant les règles de l'automate cellulaire du Tas de Sable. Pour plus de renseignements sur les problèmes de domination se référer à [HHS98].

Le problème pourrait alors s'énoncer ainsi : considérons le graphe représentant l'économie d'un pays. Chaque nœud représente une entreprise et les segments représentent les différentes interactions financières entre les entreprises. Ainsi, quand une entreprise possède trop d'argent, elle investit en distribuant l'argent à ses voisins. La question est ici la suivante : quelle

est la somme minimale que l'état doit donner aux entreprises de manière à ce que chacune reçoive de l'argent ?

## 7.2 Règle du jeu

### 7.2.1 Définition des règles

Ce jeu nécessite deux joueurs - bleu et rouge -. On tire un graphe aléatoirement et les joueurs notent le nombre de cailloux dont ils ont besoin pour gagner la partie. A ce moment là le joueur ayant donné le plus petit nombre a le droit de tenter sa chance. Soit  $k$  le nombre choisi par ce joueur disons bleu.

Le but du jeu est le suivant. Il faut placer les cailloux sur les sommets du graphe puis on réalise tous les éboulements possibles. On dit qu'un sommet devient bleu et reste bleu si à un moment donné il y a un caillou au moins sur ce sommet. Sinon le sommet est rouge. Pour gagner une partie il faut disposer les cailloux de sorte que tous les sommets soient bleus.

Il y a alors deux sortes de parties possibles :

1. Le jeu bleu où le joueur bleu qui a choisi le nombre de cailloux les place sur les sommets.
2. Le jeu rouge où les cailloux choisis par le joueur bleu sont placés sur les sommets par le joueur rouge. Évidemment rouge les place de manière à ce qu'il existe au moins un sommet demeurant rouge.

### 7.2.2 Un exemple de partie bleue

Supposons que le graphe choisi soit un arbre binaire complet de niveau 4. Cet arbre a 15 sommets.

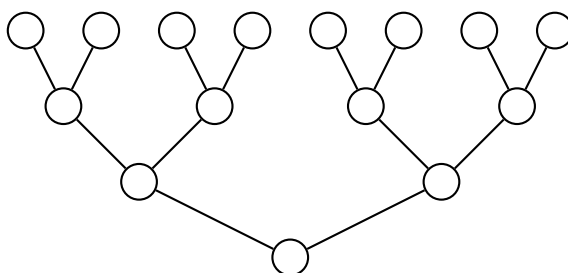


FIG. 7.1 – Arbre binaire de niveau 4

Supposons que le joueur bleu ait choisi 12 cailloux. Un placement gagnant pour lui peut alors être :

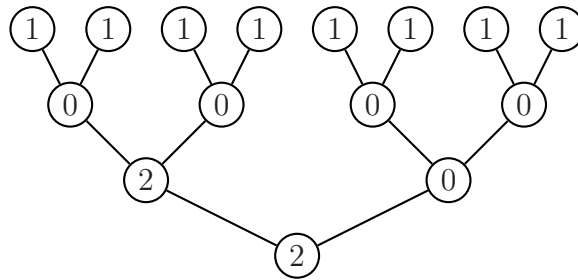


FIG. 7.2 – Jeu gagnant pour 12 cailloux

En réalité un exemple gagnant peut être trouvé pour 10 cailloux de la manière suivante :

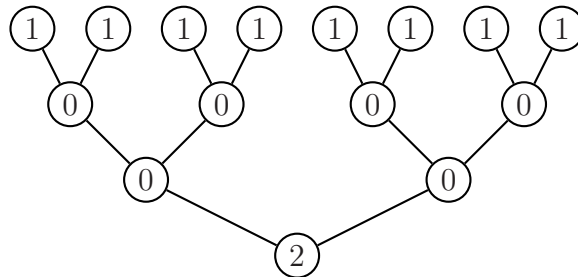


FIG. 7.3 – Jeu gagnant pour 10 cailloux

Nous verrons par la suite que 10 est le minimum pour un arbre binaire complet.

### 7.2.3 Exemple de partie rouge

Pour cette partie, le joueur rouge répartit les cailloux sur le graphe. Nous reprenons l'arbre binaire complet de niveau 4 comme exemple. Il est évident que dans ce jeu le nombre minimal de cailloux est plus grand que dans le cas de la partie bleue. En effet, dans la partie bleue, le joueur va placer les cailloux au mieux pour gagner tandis que dans ce cas le joueur va les mettre dans la pire position. Supposons que bleu ait choisi 13 cailloux, alors le joueur rouge peut les placer de la manière suivante pour gagner :

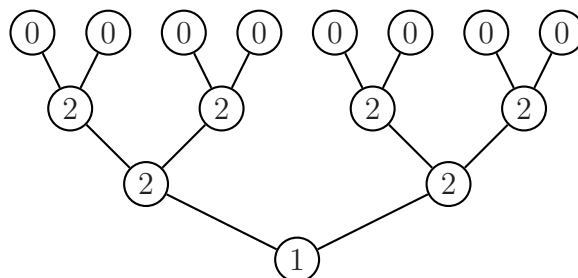


FIG. 7.4 – Jeu gagnant pour 13 cailloux

Par contre pour 14 cailloux on verra que le jeu ne s'arrête jamais et que donc tous les sommets deviennent bleus au bout d'un temps fini.

### 7.2.4 Finitude du jeu

Le jeu ici est basé sur le modèle du *chip-firing game* qui est le modèle du Tas de Sable abélien mais sans puits. La présence du puits nous permettait de conclure quant à la finitude des éboulements. En fait on peut montrer que si le jeu ne s'arrête pas alors tous les sommets s'éboulent une infinité de fois. Le jeu est donc gagné pour bleu. Nous supposons ici que le jeu est fini.

### 7.2.5 Programme

Dans cette partie nous appellerons programme la donnée d'une configuration et de l'ordre d'éboulement. Soit  $\Pi = (\rho^i)$  un programme.  $\rho^i$  désigne la configuration à l'étape  $i$  du programme. À chaque étape ne se produit qu'un seul éboulement. On appellera un programme gagnant, un programme dans lequel tous les sommets sont actifs.

## 7.3 Partie rouge

Le cas de la partie rouge est le plus simple. En effet la meilleure stratégie pour rouge est de placer  $d_i - 1$  cailloux sur chaque sommet  $i$  excepté un noté  $j$ . Tous les sommets sont alors stables mais le sommet  $j$  reste rouge.

Ainsi on est amené au théorème suivant :

**Théorème 19.** *Pour le type de partie rouge soit  $j$  le sommet de plus petit degré du graphe, le nombre minimal de cailloux que bleu doit choisir pour gagner est :*

$$k_m = 1 + \sum_{i \neq j} (d_i - 1)$$

*Démonstration.* Nous allons dans un premier temps montrer que pour la stratégie choisie précédemment le minimum est bien  $k_m$ , puis nous montrerons que pour toute autre stratégie  $k_m$  est bien un minorant.

1. Pour la stratégie choisie, au sommet  $j$  fixé, bleu doit donc choisir  $1 + \sum_{i \neq j} (d_i - 1)$  cailloux. Nous devons donc trouver  $j$  qui maximise ce nombre. Il est évident que le maximum est atteint pour un sommet de plus petit degré dans le graphe.
2. Supposons qu'il y ait une stratégie meilleure. Alors rouge a réussi à placer  $k_m$  grains sur le graphe et il reste un sommet rouge à la fin du processus d'éboulement. Soit  $j$  ce sommet rouge. À la fin le nombre de cailloux sur les sommets  $i \neq j$  est au plus  $d_i - 1$  car le sommet est stable. Donc le nombre total de cailloux est au plus  $\sum_{i \neq j} (d_i - 1)$ .

□

## 7.4 Partie bleue

On utilisera ici les notations usuelles en théorie des graphes. Le voisinage ouvert d'un sommet  $u$  est  $N(u) = \{i \in V : \{u, v\} \in E\}$  et son voisinage fermé est  $N[v] = N(v) \cup \{v\}$ . Pour un ensemble  $S$  de sommets on définit de même le voisinage fermé par  $N(S) = \bigcup_{v \in S} N[v]$  et le voisinage ouvert par  $N(S) = N[S] \setminus S$ .

Dans cette partie nous supposons que le graphe n'est pas isomorphe à une étoile. Dans ce cas la solution est triviale.

Soit  $G = (V, E)$  un graphe, on appellera  $G^2 = (V, E')$  le graphe formé par le même ensemble de sommets, mais deux sommets  $u$  et  $v$  sont reliés dans  $G^2$  si et seulement ils sont à distance au plus 2 dans  $G$  à savoir  $N[u] \cap N[v] \neq \emptyset$ .

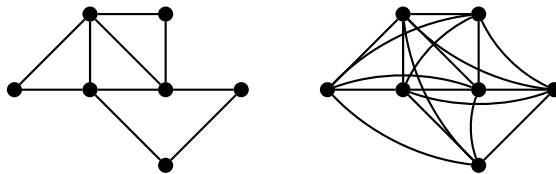


FIG. 7.5 – Exemple de graphe et son carré

### 7.4.1 Partition des sommets

Le joueur bleu place les cailloux sur le graphe. Nous examinons ici le cas d'une partie gagnante. Pour cette distribution de cailloux on peut séparer les sommets en trois catégories. (voir fig. 7.6)

- $\mathcal{E}$  l'ensemble des sommets qui s'écroulent.
- $\mathcal{V}$  l'ensemble de leurs voisins pris dans  $V \setminus \mathcal{E}$
- $\mathcal{U}$  l'ensemble des sommets sur lesquels on a placé au temps  $t = 0$  des cailloux et qui n'échangent aucun caillou avec ses voisins.

Ces trois ensembles sont bien disjoints et forment une partition de  $V$ . Nous allons étudier au cours des prochaines parties chacun de ces ensembles de manière à minimiser le nombre total de cailloux nécessaires. On suppose que l'on travaille sur la répartition optimale  $\mathcal{O}$  des cailloux. On notera  $\varkappa_m$  ce nombre minimal.

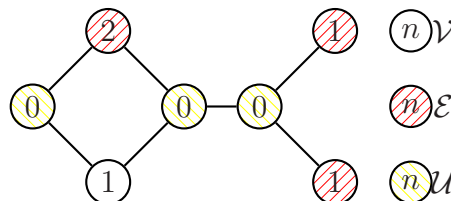


FIG. 7.6 – Partition des sommets

Une première remarque est  $\varkappa_m \leq k_m$ .

### 7.4.2 Nombre minimal de cailloux dans une configuration

Soit  $X$  un ensemble de sommets. On définit la coupure de  $X$  au graphe  $G$  que l'on notera  $C_G(X)$  par l'ensemble des arêtes reliant un sommet de  $X$  à un sommet de  $V \setminus X$ .

$$C_G(X) = \{(i, j), i \in X, j \in V \setminus X\}$$

**Lemme 15.** *Soit  $u$  une configuration sur un graphe  $G$  et  $X$  un ensemble connexe de sommets. Le nombre minimal de grains dans  $u$  sur les sommets de  $X$  pour que ceux-ci s'écroulent est*

$$|in(X)| + |C_G(X)|$$

où  $in(X)$  désigne le nombre d'arêtes internes à  $X$ .

*Démonstration.* Soit  $(i, j)$  une arête de  $in(X) \cup C_G(X)$ . Alors au moins un des sommets  $i$  et  $j$  s'est écroulé. Supposons que  $i$  se soit écroulé en dernier alors il a donné un grain à  $j$  par cette arête et ce grain est resté sur  $j$  vu que  $j$  ne s'écroule pas par la suite.  $\square$

### 7.4.3 Étude de $\mathcal{U}$

Cet ensemble est le plus simple à étudier. En effet la seule remarque sur cet ensemble est qu'en réalité on ne met qu'un caillou dessus au temps  $t = 0$ .

De plus  $\mathcal{U}$  ne contient pas d'ensemble connexe  $C$  contenant un sommet interne à  $C$ . Un sommet interne à un ensemble  $X$  est un sommet dont tous les voisins appartiennent à cet ensemble. En effet si un tel sommet  $i$  existe alors en mettant  $d_j$  cailloux sur un des sommets internes de plus petit degré, 0 sur ses voisins et 1 sur les autres on obtient une répartition gagnante  $\mathcal{O}_2$  pour bleue contenant le même nombre de cailloux sur les sommets de  $V \setminus C$  mais  $\mathcal{O}$  contient  $|C|$  cailloux sur  $C$  tandis que  $\mathcal{O}_2$  n'en contient que  $|C| - 1$ . Or  $\mathcal{O}$  a été choisie pour être optimale.

### 7.4.4 Étude de $\mathcal{E}$

**$\mathcal{E}$  est formé par un ensemble indépendant de sommets**

Nous allons montrer dans cette partie le lemme suivant :

**Lemme 16.**  *$\mathcal{E}$  est un ensemble formé d'une union de sommets au moins à distance 2 les uns des autres.*

*Démonstration.* Supposons par l'absurde que l'on a un ensemble connexe  $X$  de sommets s'écroulant. Soit  $v$  un sommet de  $X$  de plus petit degré dans  $G$ . Nous changeons la configuration initiale en mettant  $deg(v)$  cailloux sur le sommet  $v$  et un seul sur les sommets de  $X \setminus (N(X) \cup \{v\})$  comme le montre la figure 7.7

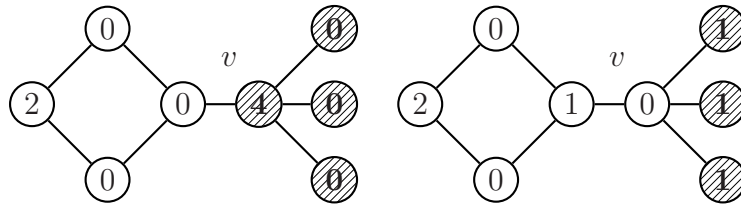


FIG. 7.7 – Transformation de  $X$

Dans le nouveau programme induit par cette distribution, tous les sommets sont actifs. Par le lemme 15, le nombre de cailloux sur  $X$  nécessaires pour ébouler  $X$  est de

$$|in(X)| + |C_G(X)|$$

Or  $|in(X)| + |C_G(X)| \geq |N[X]| - 1$  et  $|N[X]| - 1$  est le nombre de cailloux nécessaires pour notre nouveau programme.

Vérifions maintenant que dans ce nouveau programme aucun sommet voisin ne s'éboule.

Si  $deg(v) = 1$  alors seuls les sommets de degré 1 s'éboulent. Comme le graphe n'est pas une étoile, tout sommet de degré 2 est voisin d'au moins un sommet de degré 2 et donc aucun de ces sommets ne s'éboule. Comme 2 sommets de degré 1 ne peuvent être voisins, on a bien le résultat.

Si  $deg(v) \geq 2$  alors il n'y a pas de sommets de degré 1 dans  $N[X]$  et par conséquent, seul  $v$  s'éboule.

En réalisant cette transformation pour chaque ensemble connexe de  $\mathcal{E}$  on peut construire une solution optimale telle que  $\mathcal{E}$  soit formé par un ensemble indépendant de sommets.  $\square$

### Transformation du graphe

Pour la suite de la démonstration, nous allons procéder à une petite transformation du graphe  $G$  en  $G'$ . Pour chaque sommet  $v$ , on ajoute une boucle à tous ses voisins de degré 1 excepté un. (cf fig. 7.8)

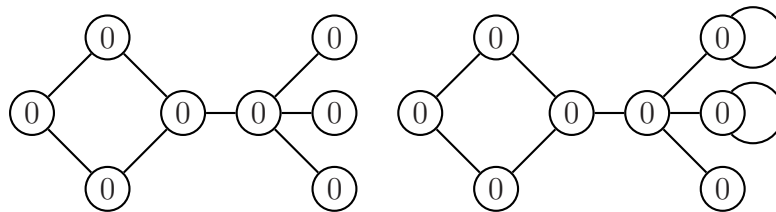


FIG. 7.8 – Transformation du graphe

Soit  $G'$  la transformée de  $G$ .

**Lemme 17.** *Pour tout graphe  $G$  on a  $\kappa(G) = \kappa(G')$ .*

*Démonstration.* Comme tout programme gagnant sur  $G'$  l'est aussi sur  $G$  on a  $\kappa(G) \leq \kappa(G')$ . Réciproquement soit  $\Pi$  un programme gagnant sur  $G$ . Par le lemme précédent on peut prendre un ensemble indépendant de sommets pour  $\mathcal{E}$ . Considérons maintenant le même programme mais sur  $G'$ . La seule différence est donc pour les sommets de degré 1 et leurs voisins. Tous les sommets de degré 1 sur  $G$  sont aussi actifs sur  $G'$ . Soit  $v$  un sommet possédant des voisins de degré 1. Comme au moins un de ses voisins est de degré 1 dans  $G'$  alors celui-ci s'éboule rendant  $v$  actif. Ainsi le programme gagnant sur  $G$  induit un programme gagnant sur  $G'$ .  $\square$

$\mathcal{E}$  est formé d'un ensemble de sommets indépendants dans  $G^2$

**Lemme 18.** *Pour tout graphe  $G$  (non-isomorphe à une étoile), il existe un programme gagnant  $\Pi$  sur  $G'$  avec  $\kappa(G)$  cailloux tel que  $N[u] \cap N[v] = \emptyset$  pour tous sommets  $u$  et  $v$  distincts de  $\mathcal{E}$ .*

*Démonstration.* Soit  $\Pi$  un programme tel que  $|\mathcal{E}|$  soit minimal parmi l'ensemble des programmes gagnants sur  $G'$  tel que  $\mathcal{E}$  soit un ensemble de sommets indépendants. Supposons qu'il existe un sommet  $w$  adjacent à deux sommets  $u$  et  $v$  de  $\mathcal{E}$ . Par construction du graphe  $G'$  au moins un de ces sommets ( $u$  par exemple) est de degré supérieur ou égal à 2 dans  $G'$ .

Comme  $\mathcal{E}$  est un ensemble indépendant de sommets, cela veut dire qu'au début du programme on avait placé au moins  $\deg(u)$  cailloux sur  $u$  et  $\deg(v)$  cailloux sur  $v$ . En mettant plutôt  $\deg(v)$  cailloux sur  $v$  et un caillou sur les sommets de  $N[u] - w$  on obtient une configuration qui induit un programme gagnant optimal tel que les sommets s'ébouillant forment un ensemble indépendant mais dont le nombre est strictement inférieur à  $\mathcal{E}$  ce qui contredit notre hypothèse sur le choix de  $\Pi$ .

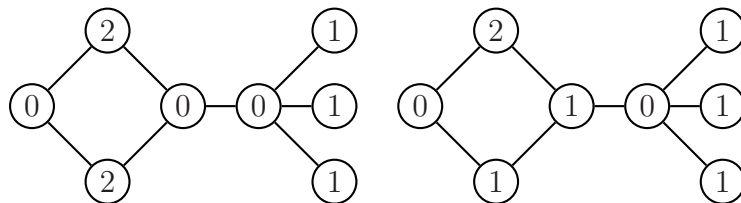


FIG. 7.9 – Les sommets de  $\mathcal{E}$  sont au moins à distance 3

$\square$

#### 7.4.5 Ensemble couvrant et $\kappa(G)$

Rappelons qu'un ensemble couvrant d'un graphe  $G$  est un ensemble  $X$  de sommets tels que pour chaque arête  $(i, j)$ , soit  $i$ , soit  $j$  appartient à  $X$ . Nous pouvons maintenant énoncer et prouver le résultat principal de ce chapitre.

**Théorème 20.** *Soit  $G$  un graphe, alors  $\kappa(G)$  est égal au nombre minimal de sommets d'un ensemble couvrant de  $G^2$ .*

*Démonstration.* Si le graphe  $G$  à  $n$  sommets est isomorphe à une étoile alors son carré est le graphe complet, et donc le cardinal minimal d'un ensemble couvrant est  $n - 1$ . Or il est facile de vérifier que  $\kappa(G)$  vaut aussi  $n - 1$ . (On met 1 caillou sur chaque branche de l'étoile).

Supposons maintenant que  $G$  n'est pas isomorphe à une étoile. Par le lemme 17,  $\kappa(G) = \kappa(G')$ . Par le lemme 18, il existe un programme  $\Pi$  gagnant sur  $G'$  utilisant  $\kappa(G')$  cailloux tel que  $\mathcal{E}$  forme un ensemble de sommets indépendants dans  $G^2$  (et dans  $G$ ). On a alors :

$$\kappa(G) = \sum_{v \in \mathcal{E}} \deg_G(v) + |\mathcal{U}| = |N(\mathcal{E})| + |\mathcal{U}| = n - |\mathcal{E}|$$

où  $n$  est le nombre de sommets de  $G$ . Comme  $\mathcal{E}$  est aussi un ensemble indépendant de  $G^2$ , on a  $\kappa(G) \geq n - \alpha(G^2)$ .

Réciproquement nous voulons montrer que  $\kappa(G) \leq n - \alpha(G^2)$ . Remarquons que pour tout ensemble indépendant  $I$  de  $G^2$ , on a  $\kappa(G) \leq n - |I|$ . En effet, on construit une configuration contenant  $\deg(u)$  cailloux sur tous les sommets  $u$  de  $I$  et 1 caillou sur les sommets de  $V \setminus N(I)$ . Cette configuration induit un programme gagnant sur  $G$  utilisant  $n - |I|$  cailloux.

Il reste à démontrer que  $n - \alpha(G^2)$  est bien la taille minimale d'un ensemble couvrant du graphe  $G^2$ . Pour cela il suffit de remarquer que pour chaque ensemble indépendant  $X$  de sommets alors  $V \setminus X$  est un ensemble couvrant. (cf fig. 7.10)

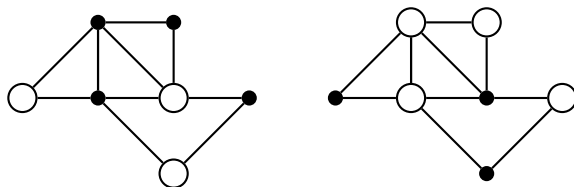


FIG. 7.10 – Exemple d'ensemble indépendant et d'ensemble couvrant

□

Enfin, Ling et Skienna [YLSS95] ont prouvé entre autres choses que le problème *Ensemble indépendant Maximal* était NP-complet en général sur les puissances d'un graphe.

**Théorème 21.** *Le problème NOMBRE DE CAILLOUX ou CHIP FIRING NUMBER*

*Donnée : Un graphe  $G$  et un entier  $k$ .*

*Question : Est-ce que  $\kappa(G) \leq k$  ?*

*est NP-complet.*

*Démonstration.* Le résultat de Ling et Skienna [YLSS95] prouve à l'aide du théorème 20 que ce problème est NP-difficile.

Mais par les lemmes précédents, il existe des programmes utilisant  $\kappa(G)$  cailloux comportant au plus  $\alpha(G^2)$  étapes. (En fait on peut montrer que le nombre d'étapes du plus court programme utilisant  $\kappa(G)$  cailloux est exactement  $\alpha(G^2)$ ) ce qui prouve que le problème est NP-complet.  $\square$

## 7.5 Exemples

### 7.5.1 Arbres $n$ -aires complets

Nous allons maintenant étudier le cas particulier des arbres  $n$ -aires complets de hauteur  $h$ . Nous appellerons arbre  $n$ -aire complet de hauteur  $h$  le graphe à  $n^h - 1$  sommets répartis en  $h$  niveaux tels qu'il y ait  $n^{i-1}$  sommets sur le niveau  $i$ .

On numérote les sommets en base  $n$  de manière à ce que les sommets ayant un numéro à  $i$  chiffres soient sur le niveau  $i$ . Soit un sommet  $a_1 \cdots a_k$ . Ce sommet est relié au sommet  $a_2 \cdots a_k$  et aux sommets  $a_1 \cdots a_k b_j$  avec  $b_j = 0..n - 1$  s'ils existent.

On obtient par exemple pour un arbre binaire de hauteur 5 le graphe suivant :

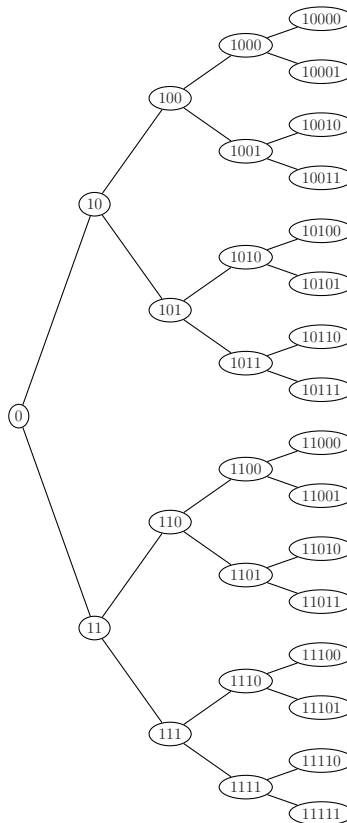


FIG. 7.11 – Arbre binaire complet de hauteur 5

Pour comprendre le théorème suivant nous définissons l'algorithme suivant :

**GLOUTON**

- $T^G := \emptyset$
- Pour  $i$  de  $n$  à  $1$  :
  - Choisir un sous-ensemble de sommets  $T_i^G$  appartenant au niveau  $i$  de cardinalité maximale tel que l'ensemble  $T^G \cup T_i^G$  soit indépendant dans  $G^2$
  - $T^G := T^G \cup T_i^G$

Dans notre exemple cela revient à sélectionner l'ensemble suivant :

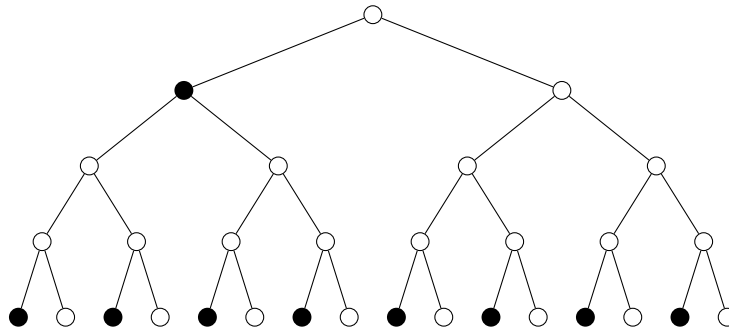


FIG. 7.12 – Algorithme Glouton sur les arbres binaires complets

Le cardinal de l'ensemble  $T^G$  construit par l'algorithme glouton pour un arbre  $t$ -aire complet de hauteur  $n$  est :

$$\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{3} \rfloor} t^{n-1-3i}$$

En effet l'algorithme glouton ne peut pas sélectionner deux sommets qui ont le même père dans l'arbre. De plus si un sommet est sélectionné, alors ni son père, ni son père de seconde génération ne peuvent être sélectionnés. Ainsi, l'algorithme choisit  $t^{n-1}$  sommets au niveau  $n$  puis  $t^{n-4}$  au niveau  $n - 3$  etc.

**Théorème 22.** *Le cardinal du plus grand ensemble indépendant de sommets pour le carré d'un arbre  $t$ -aire complet  $G$  de hauteur  $n$  est :*

$$\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{3} \rfloor} t^{n-1-3i}$$

Par suite,

$$\kappa(G) = \frac{t^n - 1}{t - 1} - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{3} \rfloor} t^{n-1-3i}$$

*Démonstration.* Soit  $T^G$  l'ensemble de sommets choisis par l'algorithme glouton et  $T_i^G$  les sommets de  $T^G$  qui appartiennent au niveau  $i$ . Alors on a

$$|T^G| = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{3} \rfloor} t^{n-1-3i}$$

Montrons maintenant que  $T^G$  est bien un ensemble maximal de sommets indépendants. Soit  $T$  un ensemble maximal de sommets indépendants ayant le plus grand nombre de sommets communs avec  $T^G$ . Soit  $T_i$  le sous-ensemble de sommets de  $T$  qui sont au niveau  $i$ . Supposons que les ensembles  $T$  et  $T^G$  soient différents. Alors soit  $k = \max\{i : T_i \neq T_i^G\}$ . Par construction de  $T^G$ , nous avons  $n - k = 0 \pmod{3}$ .

Supposons maintenant qu'il existe un sommet  $v$  dans  $T_k \setminus T_k^G$ . Soit  $w$  le sommet de  $T^G$  qui a le même père que  $v$ . Ce sommet existe car il est facile de vérifier que l'algorithme glouton pour chaque sommet  $z$  de niveau  $j - 1$  sélectionne un seul sommet de niveau  $j$  qui est relié à  $z$  si  $n - j = 0 \pmod{3}$ . Alors on constate que  $T' := T - \{v\} \cup \{w\}$  est aussi un ensemble maximal indépendant de  $G^2$  ce qui est en contradiction avec le choix de  $T$ . Ainsi,  $T_k \subseteq T_k^G$ .

Pour montrer l'inclusion inverse on choisit un sommet  $v$  dans  $T_k^G \setminus T_k$ . Comme on ne peut pas ajouter  $v$  à  $T$  cela veut dire qu'il existe un sommet  $w$  dans  $T$  à distance au plus 2 de  $v$ . Par définition de  $k$  comme tous les sous-ensembles  $T_i$  et  $T_i^G$  sont égaux pour  $i > k$ ,  $w$  appartient à un niveau  $k' < k$ . Alors l'ensemble  $T' := T - \{w\} \cup \{v\}$  contredit le choix de  $T$ .  $\square$

## 7.5.2 Grille

Nous avons vu précédemment que la grille était le modèle le plus couramment étudié par les physiciens. Nous allons donc ici étudier le problème de trouver un ensemble maximal indépendant sur une grille  $n \times p$ . Nous représenterons ici encore les sommets de la grille par des faces et nous dirons que deux sommets sont adjacents si les faces sont adjacentes par une arête. Nous étudierons ici le cas de la grille sans bord c'est à dire que la face infinie ne représente pas un sommet.

Le but est de trouver le nombre maximal de sommets séparés par une distance au moins 3. En réalité il s'agit de poser le plus de dominos de taille  $3 \times 3$  sur une grille  $(n + 2) \times (p + 2)$  sans chevauchement. En effet, supposons que l'on a une distribution de dominos alors l'ensemble des centres forme bien un ensemble indépendant dans le carré de la grille  $n \times p$  et réciproquement comme le montre la figure suivante.

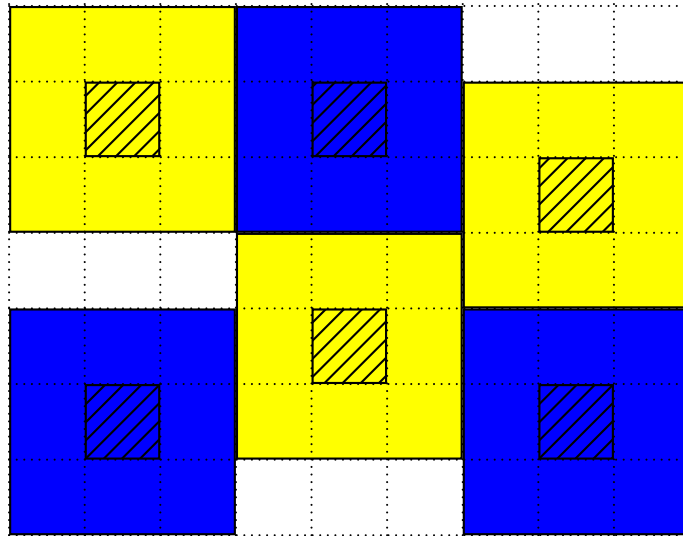


FIG. 7.13 – Correspondance dominos / ensemble maximal indépendant

**Théorème 23.** *Le cardinal d'un ensemble indépendant maximal sur la grille  $n \times p$  est*

$$\lfloor \frac{n+2}{3} \rfloor \lfloor \frac{p+2}{3} \rfloor$$

*Démonstration.* Il suffit de montrer que la meilleure méthode de ranger les dominos est de les aligner et de mettre les coins inférieurs gauches des dominos aux coordonnées  $(3j, 3k)$ . Nous repérerons toujours un domino par la donnée des coordonnées du coin inférieur gauche. Nous dirons qu'un domino est aligné si les coordonnées de son coin inférieur gauche sont des multiples de 3.

Pour  $k$  un nombre nous noterons  $\bar{k}$  le nombre  $3\lfloor \frac{k}{3} \rfloor$ .

Pour cela, notons  $y = \min\{j, (i, j) \text{ repère un domino non aligné}\}$ . Soit  $x$  l'abscisse d'un domino non rangé d'ordonnée  $y$ .

Supposons  $y \neq \bar{y}$ . Par définition de  $y$ , tous les dominos repérés par les coordonnées  $(a, b)$  avec  $b < y$  sont bien rangés. Donc on peut mettre le domino  $(x, y)$  en  $(x, \bar{y})$ . Donc on peut ranger tous les dominos de manière à ce que leur ordonnée soit un multiple de 3.

Par le même raisonnement sur l'abscisse on en déduit que tous les dominos peuvent être pris bien rangés. □



# Bibliographie

- [BC95] P. Bak and M. Creutz, *Fractals and self-organized criticality*, Fractals in Science (1995), 27–47.
- [BL92] A. Björner and L. Lovász, *Chip-firing on directed graphs*, J. Algebraic Combin. **1** (1992), 305–328.
- [BLS91] A. Björner, L. Lovász, and P. Schor, *Chip-firing games on graphs*, European J. Combin. **12** (1991), no. 4, 283–291.
- [BTW87] P. Bak, C. Tang, and K. Wiesenfeld, *Self-organized criticality : An explanation of  $1/f$  noise*, Physical Review Letters **59** (1987), no. 4, 381–384.
- [BTW88] P. Bak, C. Tang, and K. Wiesenfeld, *Self-organized criticality*, Phys. Rev. A. **38** (1988), 364–374.
- [CB91] K. Chen and P. Bak, *Self-organized criticality in a crack-propagation model of earthquakes*, Physical Review A **43** (1991), no. 2, 625–630.
- [CDHS] E.J. Cockayne, P.A. Jr. Dreyer, S.M. Hedetniemi, and Hedetniemi S.T., *roman domination in graphs*, preprint.
- [CJD91] D. Cox, Little J., and O’Shea D., *Ideals, varieties, and algorithms : An introduction to computational algebraic geometry and commutative algebra*, UTM, Springer-Verlag, 1991.
- [Coh93] H. Cohen, *A course in computational algebraic number theory*, Springer, 1993.
- [CP00] R. Cori and D. Poulalhon, *Bisuites de parking*, LACIM, 2000.
- [CR00] R. Cori and D. Rossin, *On the sandpile group of dual graphs*, European Journal of Combinatorics **21** (2000), no. 4, 447–459.
- [CRSed] R. Cori, D. Rossin, and B. Salvy, *Polynomial ideals for sandpiles and their gröbner bases*, TCS (To be published).
- [Dha90] D. Dhar, *Self-organized critical state of sandpile automaton models*, Physical Review Letters **64** (1990), 1613–1616.
- [DM94] D. Dhar and SS. Manna, *Inverse avalanches in the abelian sandpile model*, Phys. Rev. E **49** (1994), 2684–2687.
- [DRSV95] D. Dhar, P. Ruelle, S. Sen, and D. Verma, *Algebraic aspects of abelian sandpile models*, Journal of Physics A **28** (1995), 805–831.

- [GKP89] R. Graham, D. Knuth, and O. Patashnik, *Concrete mathematics*, AW, 1989, A Fondation for Computer Science.
- [HHS98] T.W. Haynes, S.T. Hedetniemi, and P.J. Slater, *Domination in graphs : advanced topics*, Marcel Dekker, New York, 1998.
- [HM91] J. Hafner and K. McCurley, *Asymptotically fast triangularization of matrices over rings*, SIAM Journal of Computing **20** (1991), no. 6, 1068–1083.
- [Mar97] O. Marguin, *Application de méthodes algébriques à l'étude algorithmique d'automates cellulaires et à l'analyse par ondelettes*, Ph.D. thesis, Université CLAUDE BERNARD - LYON 1, 1997.
- [MD91] S.N. Majumdar and D. Dhar, *Height correlations in the abelian sandpile model*, J. Phys. A **24** (1991), 357–362.
- [MM82] e.W. Mayr and A. Meyer, *The complexity of the word problem for commutative semigroups and polynomial ideals*, Adv. Math. **46** (1982), 305–329.
- [MN99] Cris. Moore and Martin. Nilsson, *The computational complexity of sandpiles*, Journal of Statistical Physics **96** (1999), 205–224.
- [RLB00] D. Rossin and Y. Le Borgne, *Identité du groupe du tas de sable sur des grilles rectangulaires*, LACIM, 2000.
- [Ros98] D. Rossin, *Étude de l'automate cellulaire du tas de sable*, Rapport de DEA, 1998.
- [Rus95] J. J. Rushanan, *Eigenvalues and the smith normal form*, Linear Algebra and its Applications **216** (1995), 177–184.
- [SL96] Arne. Storjohann and George. Labahn, *Asymptotically fast computation of hermite normal forms of integer matrices*, ISSAC'96, 96.
- [SM98] Arne. Storjohann and Thom. Mulders, *Fast algorithms for linear algebra modulo  $n^*$* , ESA 98, LNCS, vol. 1461, 1998, pp. 139–150.
- [Ste99] Ian. Stewart, *Defend the roman empire!*, Scientific American (1999), 136–138.
- [Sto96a] Arne. Storjohann, *A fast + practical + deterministic algorithm for triangularizing integer matrices*, Tech. Report 255, ETH Zurich, December 1996.
- [Sto96b] Arne. Storjohann, *Near optimal algorithms for computing smith normal forms of integer matrices*, ISSAC'96, 1996.
- [Sto98] Arne. Storjohann, *Computing hermite and smith normal forms of triangular integer matrices*, Linear Algebra and its applications **282** (1998), 25–45.
- [Tut84] Tutte, *Graph theory*, Encyclopedia of Math., vol. 21, Addison-Wesley, 1984.
- [WVL92] R.M. Wilson and J.H. Van Lindt, *A course in combinatorics*, Cambridge University Press, 1992, 449-460.
- [YLSS95] Ling Yaw Ling and Skiena Steven S., *Algorithm for square roots of graphs*, SIAM J. Discrete Math. **8** (1995), no. 1, 99–118.

## Résumé

L'étude et la compréhension de phénomènes naturels qu'il semble difficile de prédire, tels les tremblements de terre et les raz de marée intriguent depuis quelques temps un certain nombre de physiciens. En effet, il semble que les modèles classiques basés sur des fonctions d'état continues peuvent difficilement expliquer les phénomènes observés.

En 1987, Bak, Tang et Wiesenfeld introduisent un modèle basé sur un automate particulier dont l'étude expérimentale montre des caractéristiques proches de celles observées pour des tremblements de terre. Cet automate est appelé automate du tas de sable.

En 1990, Dhar, Ruelle, Sen et Verma étudient les propriétés mathématiques de l'automate du tas de sable. Cet article jette les bases d'une théorie algébrique et combinatoire des états critiques du système en montrant que ceux-ci forment un groupe abélien fini.

Cette thèse porte essentiellement sur l'étude de ce groupe d'un point de vue algorithmique, combinatoire et algébrique. Nous étudions dans un premier temps la complexité de l'opérateur de groupe. Puis nous étudions le groupe sur quelques familles de graphes connues avant de montrer que le groupe d'un graphe planaire est isomorphe au groupe de chacun de ses duaux géométriques.

Nous montrons comment associer à un groupe abélien fini un idéal de polynômes et dans le cas du groupe du Tas de Sable, nous donnerons une caractérisation de l'opérateur de groupe en terme de réduction de polynôme.

## Abstract

The study and the understanding of natural phenomena such as earthquakes, and tidal waves have puzzled physicists for a long time. Indeed, it seems that classical models based on continuous functions can hardly explain the physical observations.

In 1987, Bak, Tang and Wiesenfeld introduce a new model based on a cellular automaton whose experimental study shows behaviours similar to earthquakes'. This automaton is called the Sandpile Automaton.

In 1990, Dhar, Ruelle Sen and Verma study the mathematical properties of this automaton. This article gives the basis of an algebraic theory of the critical states of the system, showing that they form a finite abelian group.

This thesis focuses on the study of the Sandpile group from an algorithmical, combinatorial and algebraic point of view. At first, we study the complexity of the group operator; then, we give the structure of the group on several usual families of graphs such as wheels and complete graphs to finally show that the group of a planar graph is isomorph to the group of each of its geometric duals.

We also show how to associate a polynomial ideal to an abelian group, and for the sandpile group we give a characterization of the group operator and of the identity in terms of polynomial reductions.