Une approche de la notion de limite dans un environnement basé sur un système de calcul formel

Jean-Michel Gélis * **, Dominique Lenne* ***

** INRP TECNE*
91 Rue Gabriel Péri
92260 Montrouge
gelis@inrp.fr
*** IUFM de Versailles*
Domaine du Saulchoir
91 450 Etiolles
**** Laboratoire Heudiasyc*
Université de Technologie de Compiègne
BP 20529
60205 Compiègne
lenne@utc.fr

RÉSUMÉ. *Nous présentons l'environnement LIMITES qui a été conçu à partir du système de calcul formel MuPad. Cet environnement offre aux élèves la possibilité d'aborder l'étude du concept de limite qui est un concept important de l'analyse au lycée. Il permet de considérer les expressions en conjonction avec leur domaine de validité, caractéristique qui différencie l'analyse de l'algèbre. LIMITES permet d'appliquer les preuves sur le calcul des limites au lycée et de réécrire les expressions. Des conjectures sont possibles, au moyen d'outils graphique et numérique. Nous présentons un exemple de protocole élève qui illustre l'intérêt d'un tel environnement. L'existence du système de calcul formel a grandement facilité l'implantation, au sein de l'environnement, de ce concept de l'analyse dont les connaissances, à la différence de l'algèbre, ne sont pas toujours de nature algorithmique.*

MOTS-CLÉS : *EIAH, calcul formel, environnement, apprentissage, analyse, limites.*

1. Introduction

Cet article s'intéresse à l'apprentissage d'un domaine particulier des mathématiques, celui de l'analyse au lycée. Il s'agit d'un domaine difficile, en rupture avec la démarche algébrique pratiquée dans les classes précédentes. Depuis quelques années, de nombreux travaux ont porté sur l'utilisation de logiciels afin de permettre aux élèves de mieux s'approprier les concepts et les méthodes de l'analyse.

Ces travaux s'organisent autour de deux approches. La première repose sur la conception d'environnements d'apprentissage spécifiques, centrés sur des tâches précises. Cette approche peut être illustrée par exemple par Camelia [VIVET 84] et Mathpert [BEESON 92] qui traitent des domaines allant de l'intégration pour le premier, à toute une palette de problèmes relatifs à l'analyse pour le second (résolution d'équations, dérivées…). Ces différents systèmes fournissent à l'élève les outils nécessaires à la résolution de tâches identifiées. De nombreux travaux ont abordé la difficile question de la définition des bases de connaissances, de résolution et d'aide, à mettre à la disposition des élèves [NICAUD et al. 93]. Ces bases de connaissances sont parfois définies en termes de règles, de plans et d'heuristiques permettant de distinguer, parmi les règles applicables à un contexte donné, celles qui sont susceptibles de conduire à la solution. Ces systèmes ont l'avantage de proposer à l'élève des connaissances étroitement adaptées à leur niveau. Ils présentent néanmoins quelques limites liées à l'étendue du domaine qu'ils traitent.

La seconde approche pour étayer l'apprentissage de l'analyse à l'aide de l'informatique s'appuie sur les systèmes de calcul formel (SCF). Ces systèmes (tels que Derive, Maple ou Mathematica) n'ont pas été développés à des fins d'enseignement mais leur utilisation dans les lycées est incontournable, pour des raisons culturelles et scientifiques. Les programmes du secondaire les mentionnent explicitement. De nombreuses recherches ont proposé des pistes de travail et étudié les conditions de leur intégration dans l'enseignement [LAGRANGE 2000, ARTIGUE et al 99, TROUCHE 96]. L'une des difficultés essentielles est que les connaissances et méthodes utilisées par les SCF ne sont pas accessibles à l'élève qui doit développer des schèmes d'action instrumentée [RABARDEL 99] pour obtenir des résultats accessibles et exploitables.

Dans cet article, nous explorons une troisième voie, à savoir l'utilisation d'un environnement d'apprentissage fondé sur un système de calcul formel. Cette approche permet de s'affranchir des limitations des environnements d'apprentissage spécifiques, en réduisant la difficulté des schèmes d'action instrumentée nécessaires à l'utilisation de l'environnement. Nous avons conçu l'environnement LIMITES [GELIS & LENNE 2000] qui s'appuie sur le SCF MuPad et traite le domaine des limites. Nous présentons ci-dessous ses fonctionnalités, en liaison avec la spécificité du domaine de l'analyse que nous abordons sur chacun des points traités. Nous proposons ensuite un exemple d'interaction obtenu lors de sessions de travail avec des élèves de 1ère ES.

2. L’objet premier de LIMITES, l’expression et son domaine de validité

Si l’expression est un objet commun à l’analyse et à l’algèbre, le contexte de son utilisation n’est pas exactement le même dans les deux domaines. En algèbre, les expressions sont généralement des polynômes définis sans restriction sur l’ensemble des réels. En outre, les actions réalisées sur les expressions (factorisations, développements, …) ne supposent, pour les variables en jeu, aucune hypothèse d’appartenance à des ensembles particuliers.

En revanche, l’analyse concerne les fonctions, définies à partir de leur expression image et de leur ensemble de définition. Les tâches qui portent sur les fonctions se réfèrent à cet ensemble de définition (limites, intégration, étude des variations, dérivation…). De nombreux problèmes d’analyse portent sur des études locales, au voisinage d’un point donné ou de l’infini. Les techniques et méthodes qui s’y rapportent consistent à définir un voisinage permettant, par exemple, des encadrements locaux de la fonction et l’application de théorèmes impossibles à appliquer sur la totalité de l’ensemble de définition.

L’environnement LIMITES prend en compte cette particularité de l’analyse en proposant, comme objet premier, non pas l’expression, mais le couple constitué de l’expression et d’un domaine de validité donné par l’utilisateur. La figure 1 illustre l’interaction d’un utilisateur qui cherche à définir dans LIMITES un tel objet. Le domaine de validité proposé peut être réfuté par l’environnement, si celui-ci n’est pas inclus dans le domaine de définition de la fonction associée.

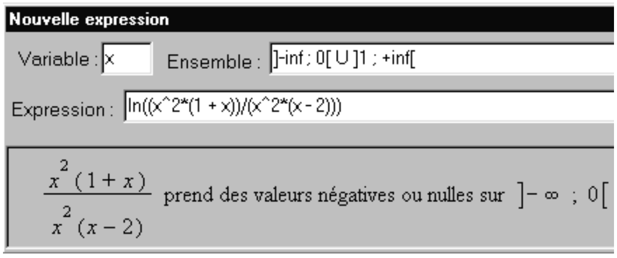

figure 1 *: Exemple d’entrée refusée par LIMITES, le domaine de validité et l’expression proposée n’étant pas compatibles.*

3. Règles de transformations

Pour résoudre les problèmes d’analyse, des réécritures d’expressions au moyen de règles de transformations sont nécessaires. Par exemple, dans le domaine du calcul de limites, l’application de certains théorèmes impose une forme syntaxique adéquate (pour éviter les formes indéterminées du type 0/0 par exemple). L’environnement LIMITES permet de telles actions. L’application de certaines règles de transformation peut produire des expressions différentes selon le domaine d’appartenance de la variable x. La figure 2 en propose un exemple, où, selon que la variable appartienne à $\mathbf{R}^-$, $\mathbf{R}^+$ ou **R**, l'expression résultante comporte un opposé, une valeur absolue ou non.

2. Pour tout x appartenant à $]-\infty\ ;\ -10[$

$\ln((x+1)^2)$ on transforme en produit

$= 2\ln(-(x+1))$

figure 2 *: L'application d'une règle de transformation tient compte du domaine de validité de la variable.*

4. Application des théorèmes sur les limites

1. $$\lim_{x \to +\infty} x^2\left(1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3}{x} = 0 \quad \text{Limite de référence}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2}{x^2} = 0 \quad \text{Limite de référence}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right) = 1 \quad \text{Somme sans indétermination}$$

$$\lim_{x \to +\infty} x^2\left(1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right) = +\infty \quad \text{Produit sans indétermination}$$

figure 3 *: Exemple d'une preuve sur les limites au niveau 3.*

Dans le domaine de l'analyse, les élèves de lycée disposent de théorèmes adaptés à leur niveau pour démontrer les résultats cherchés. Les algorithmes des systèmes de calcul formel ne s'appuient généralement pas sur des théorèmes connus des élèves, mais sur des connaissances plus complexes et plus générales qui assurent un plus grand champ d'application. Par exemple, la détermination des limites n'utilise pas les théorèmes connus des lycéens (limite d'une somme, d'un produit…) mais les développements limités inconnus de ces élèves. L'environnement LIMITES offre aux élèves la possibilité, en liaison avec le système de calcul formel sous-jacent, d'appliquer les théorèmes qu'ils connaissent. Plusieurs niveaux ont été déterminés pour cela. Au niveau 1, la preuve requiert la justification systématique de toute affirmation et l'indication exacte du cas d'application des théorèmes invoqués (tel que le théorème sur la limite d'une somme). Au niveau 3, l'environnement n'impose plus l'indication de certaines limites de références (supposées connues implicitement) et les cas d'application des théorèmes sont regroupés (figure 3). Au niveau 4, apparaissent de nouveaux théorèmes (tel que la limite d'un polynôme en l'infini).

5. Des outils pour conjecturer

Les domaines de l'algèbre et de l'analyse diffèrent sur le plan de l'organisation des méthodes qui leur sont attachées. En algèbre, nombre d'entre elles (telles que développer, factoriser, réduire) peuvent être organisées sous la forme d'algorithmes ou de suites d'actions pilotées par des heuristiques et susceptibles de conduire à la solution. En analyse, de telles organisations sont difficiles à systématiser. Par exemple, la détermination des limites éventuelles de suites définies par récurrence à l'aide d'égalités de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ peut s'appuyer sur la recherche de points fixes solutions des équations $x = f(x)$, $x = (fof)(x)$,…, $x = f^{(n)}(x)$, susceptibles d'être limites de suites extraites [ROGALSKI 94]. Ces méthodes dépendent étroitement des fonctions en jeu et leur application ne peut être systématisée. L'intuition et l'expérience peuvent conduire à établir des résultats intermédiaires difficiles à automatiser.

Dans le domaine des limites, au niveau des classes de lycée, ce type de méthodes se rencontre par exemple lors de la détermination de limites à l'aide de majorations, minorations ou encadrements de fonctions. La recherche de tels encadrements est difficile (ils sont généralement donnés aux élèves) et il est vain d'établir des méthodes générales pour en produire.

En conséquence, l'environnement LIMITES met à la disposition de l'élèves des outils numériques et graphiques qui lui permettent d'étayer et de vérifier les conjectures qu'il établit. Dans le cadre numérique, un curseur gradué selon une échelle logarithmique permet d'accéder de façon fine au voisinage du point voulu. Dans le cadre graphique, une expression, ainsi que les sous-expressions souhaitées, peuvent être représentées au voisinage des points indiqués, selon une fenêtre spécifiée par l'utilisateur.

6. Exemple d'interaction

Nous présentons dans ce paragraphe un exemple d'interaction avec LIMITES obtenu en avril 2002 avec des élèves de 1ère ES du lycée Fustel de Coulanges[1] à Massy (91). Il s'agissait d'étudier les limites en $+\infty$ des fonctions définies par $g(x)=(x+1)\sqrt{x}-A(x)$ où $A(x)$ prenait les valeurs 1, $\sqrt{x}$, x, $x\sqrt{x}$, x^2, $x^2\sqrt{x}$, x^3, $x^3\sqrt{x}$, x^4, $x^4\sqrt{x}$. Les élèves devaient conjecturer l'existence et les valeurs de ces limites puis prouver certains résultats à l'aide de l'environnement LIMITES. En

[1] Avec l'aide de Michel Enjalbert et Hervé Hamon, professeurs de mathématiques au lycée.

fait, les valeurs obtenues se répartissaient entre $+\infty$ (pour $A(x)$ égal à 1, $\sqrt{x}$, x et $x\sqrt{x}$) et $-\infty$ (pour les autres valeurs de $A(x)$).

1. **preuve relative à la limite en $+\infty$ de** $(x+1)\sqrt{x}-x^4\sqrt{x}$
   a. preuve de $\lim_{x\to+\infty}(x+1)\sqrt{x}=+\infty$ et de $\lim_{x\to+\infty}x^4\sqrt{x}=+\infty$
   b. abandon
2. **réécriture de** $(x+1)\sqrt{x}-x^4\sqrt{x}$
   a. factorisation de x ; obtention de $x\left[\frac{x+1}{\sqrt{x}}-x^3\sqrt{x}\right]$
3. **réécriture de** $(x+1)\sqrt{x}-x^4\sqrt{x}$
   a. factorisation de x^2 ; obtention de $x^2\left[\frac{x+1}{x\sqrt{x}}-x^2\sqrt{x}\right]$
   b. factorisation de $\frac{x+1}{x\sqrt{x}}$; obtention de $x^2\frac{x+1}{x\sqrt{x}}\left[1-\frac{x^4}{x+1}\right]$
   c. simplification de toute l'expression ; obtention de $\frac{1}{\sqrt{x}}\left[x+x^2-x^5\right]$
4. **preuve relative à la limite en $+\infty$ de** $\frac{1}{\sqrt{x}}\left[x+x^2-x^5\right]$
   a. preuve de $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=0$, $\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$, $\lim_{x\to+\infty}x^2=+\infty$, $\lim_{x\to+\infty}x^5=+\infty$
   b. abandon
5. **réécriture de** $\frac{1}{\sqrt{x}}\left[x+x^2-x^5\right]$
   a. factorisation de x ; obtention de $\frac{1}{\sqrt{x}}x\left[1+x-x^4\right]$
   b. simplification de toute l'expression ; obtention à nouveau de $\frac{1}{\sqrt{x}}\left[x+x^2-x^5\right]$
   c. abandon

figure 4 *: Détermination d'une limite en $+\infty$ par Alexandra.*

Nous nous intéressons dans ce paragraphe à la preuve d'une limite produite par Alexandra au cours de l'une des séances (figure 4). Nous retiendrons du travail de cette élève les enseignements suivants :

- l'environnement LIMITES lui a offert la possibilité de multiplier les essais, d'alterner tentatives de preuves et réécritures, de procéder à des explorations plus approfondies que ne l'aurait permis un travail papier/crayon ;

- l'environnement LIMITES a donné l'occasion à Alexandra de bien réaliser l'existence de formes indéterminées (les preuves tentées aux points 1 et 4 de la figure 4 conduisent à des impasses) ;

- l'environnement LIMITES a permis à Alexandra de commencer à construire des stratégies pour lever les indéterminations de la forme entre $+\infty\ -\infty$; en effet, cette élève a procédé à des factorisations, qu'elle a poussées jusqu'à obtenir un terme égal à 1 dans la parenthèse (points 3b et 5a de la figure 4) ; même si les formes obtenues conduisaient encore à des indéterminations (autant dans la parenthèse, pour le point 5a, que dans les termes mis en facteur, pour les points 3b et 5a), il n'en reste pas moins que LIMITES a permis à Alexandra de développer et de tester une stratégie liées aux formes indéterminées ;

- l'environnement LIMITES a donné l'occasion à Alexandra de lier les points de vue graphique, numérique et formel dans l'étude de limites ; en effet, le travail présenté ici était l'aboutissement d'une recherche conduite avec l'environnement et qui visait à conjecturer l'existence et la valeur de cette limite dans les cadres graphique et numérique.

Notons que, pour cette élève, l'appropriation de l'environnement n'est pas totalement finalisé. En effet, aux points 3c et 5b, Alexandra a procédé à une simplification non sur le terme factorisé mais sur l'expression entière. Elle a ainsi perdu la forme intéressante qu'elle avait obtenue (le terme 1 disparaît dans la parenthèse, ce qui ajoute une forme indéterminée).

7. Conclusion

L'environnement LIMITES que nous avons présenté prend en compte quelques unes des spécificités de l'analyse au lycée : toute expression est assortie d'un domaine de validité, les preuves nécessitent de bien identifier les cas précis d'application des théorèmes (ce qui est rapidement fastidieux lors de travaux papier/crayon), les indéterminations imposent des transformations d'expressions tenant compte du domaine de validité, des conjectures sont parfois nécessaires (LIMITES les permet dans les cadres numérique et graphique).

Nous sommes actuellement dans une phase de validation des hypothèses que nous formulons sur l'utilisation de LIMITES. L'interaction proposée aux élèves semble leur permettre de mieux s'approprier les différentes techniques pour lever les indéterminations, d'éprouver ces techniques en en identifiant les contextes d'application pertinents. Les élèves trouvent ici un cadre pour aller rapidement et efficacement au bout de leur choix, par exemple en commençant des preuves finalement inabouties avant d'appliquer de nouvelles transformations. LIMITES permet aux élèves de vérifier leurs conjectures et de confirmer ou non les éléments qu'ils avaient anticipés.

Une dernière hypothèse, sur laquelle nous travaillons actuellement, est relative au choix d'appuyer l'environnement LIMITES sur un système de calcul formel (et non sur une base de connaissances spécifique). Ce choix a permis de disposer d'un ensemble de connaissances conséquent qui a facilité l'implantation dans l'environnement de l'expertise de résolution nécessaires aux élèves. Dans le domaine de l'analyse et contrairement à l'algèbre, ces connaissances ne sont pas toujours de nature algorithmique et peuvent faire appel à des conjectures locales, parcellaires, difficilement généralisables. Un environnement d'apprentissage en analyse doit disposer de connaissances étendues permettant de vérifier des conjectures émises, voire de proposer des démarches prometteuses. Ces connaissances sont disponibles auprès d'un système de calcul formel, même si elles doivent être adaptées pour être présentées et exploitées par des élèves de lycée.

8. Bibliographie

[ARTIGUE et al 99] Artigue M., Lagrange J.B., « Instrumentation et écologie didactique de calculatrices complexes : éléments d'analyse à partir d'expérimentations en classe de première S », *Actes du colloque « Calculatrices symboliques et géométriques dans l'enseignement des mathématiques »,* IREM de Montpellier.

[BEESON 92] Beeson M., « Mathpert: Computer Support for Learning Algebra, Trignonometry and Calculus », in A. Voronkov(ed.), *Logic Programming and Automated Reasoning,* Lectures Notes in Artificial Intelligence, Springer-Verlag.

[GELIS & LENNE 2000] Gélis J.M. , Lenne D. (2000), « User Interface Design in a Learning Environment based on a Computed Algebra System », *EDMEDIA'2000*, Proceedings, Montreal.

[LAGRANGE 2000] Lagrange J.B., « Approches didactique et cognitive d'un instrument technologique dans l'enseignement, le cas du calcul formel en lycée », *Mémoire d'habilitation à diriger les recherches*, Paris 7.

[NICAUD et al 93] : Nicaud J.F., Gélis J.M., Saïdi M., « A Framework for Learning Polynomial Factoring with new Technologies », *International Conference on Computer in Education 93*, Taïwan.

[RABARDEL 99], Rabardel P., « Eléments pour une approche instrumentale en didactique des mathématiques », *Actes de la Xème Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques*, Houlgate, vol I, 203-213.

[ROGALSKI 94] Rogalski M., « Les concepts de l'E.I.A.O. sont indépendants du domaine ? L'exemple de l'enseignement de l'analyse », *Recherche en Didactique des Mathématiques*, Vol. 14/1.2, Grenoble, La Pensée Sauvage.

[TROUCHE 96] Trouche L, « A propos de l'apprentissage des limites de fonctions dans un environnement calculatrice : étude des rapports entre processus de conceptualisation et processus d'instrumentation », *Thèse*, Université de Montpellier 2.

[VIVET 84] Vivet M., « Expertise mathématique et informatique, Camelia, un logiciel pour raisonner et calculer », *Thèse d'état*, Université de Paris VI.