

Invariants de Seiberg-Witten et courbes réelles

Damien Gayet

30 avril 2004

Abstract

On a compact oriented four-manifold with an orientation preserving involution c , we count solutions of Seiberg-Witten equations, which are moreover symmetrical in relation to c , to construct “real” Seiberg-Witten invariants. Using Taubes’ results, we prove that on a symplectic almost complex manifold with an antisymplectic and antiholomorphic involution, this invariants are not all trivial, and that the canonical bundle is represented by a real holomorphic curve.

Résumé

Sur une variété compacte de dimension 4 orientée possédant une involution c préservant l’orientation, nous comptons les solutions symétriques par rapport à c des équations de Seiberg-Witten pour définir des invariants “réels” de Seiberg-Witten. Dans le cas d’une variété symplectique presque complexe munie d’une involution antisymplectique et antiholomorphe, nous utilisons les résultats de Taubes pour démontrer d’une part que les invariants réels ne sont pas tous nuls, d’autre part que le fibré canonique de la variété est représenté par une courbe réelle holomorphe.

CODE MATIÈRE AMS : 14P25, 53D05, 57R57.

0.1 Introduction

Peu après l’apparition dans [Wi] des invariants de Seiberg-Witten, Taubes montre que ces invariants ne sont pas tous triviaux sur une variété symplectique. Il en déduit, entre autres, l’existence de courbes J -holomorphes représentant le fibré canonique de la variété.

Le but de cet article est d’établir une version *réelle* de ces résultats, c’est à dire d’obtenir des courbes non seulement holomorphes, mais aussi invariantes par une structure réelle sur la variété symplectique. Plus précisément, considérons une variété symplectique réelle (X, ω, J, c) , où ω est une forme symplectique, J une structure presque complexe compatible avec ω , et c une involution J -antiholomorphe et antisymplectique. Nous démontrons le résultat suivant :

Théorème 1 *Soit (X, ω, J, c) une variété de dimension 4 symplectique compacte réelle, vérifiant $b_+ > 1$. Alors le fibré canonique est représenté par une courbe J -holomorphe invariante par c , a priori singulière.*

Pour cela, nous nous plaçons plus généralement dans une variété riemannienne (X, g) de dimension 4 orientée munie d’une involution c isométrique et préservant l’orientation. Nous définissons d’abord la notion de structure de Spin^c c -réelle. Sur ces structures, la différentielle dc agissant sur le fibré des repères orthonormés orientés se relève en une involution antilinéaire. Cette structure est nécessaire pour pouvoir construire des courbes réelles. En effet, dans une variété presque complexe réelle, la structure standard tordue par un fibré en cercles représenté par une courbe J -holomorphe réelle est c -réelle. Il est facile de constater que la structure standard tordue par le fibré canonique vérifie cette condition nécessaire.

Nous considérons alors les solutions “symétriques” par rapport à c des équations de Seiberg-Witten. L’espace des solutions, tout comme dans le cas classique, jouit de propriétés d’invariance, de lissité, de compacité, d’orientabilité, et permet de définir un invariant $SW(\mathfrak{s}, c) \in \mathbb{Z}$ indépendant de la métrique pour laquelle c est isométrique, et vérifiant pour tout difféomorphisme f de la variété $SW(f^*\mathfrak{s}, fcf^{-1}) = SW(\mathfrak{s}, c)$.

Dans le cas d’une variété presque complexe symplectique réelle, la démonstration par Taubes du cas classique s’adapte à notre situation et permet de démontrer que l’invariant réel est non nul pour la structure standard, twist ou non par le fibré canonique.

Pour construire une courbe J -holomorphe représentant le fibré canonique, Taubes utilise une suite de déformations des équations classiques. L'invariant tant indifférent à ces déformations, sa non trivialité implique chaque étape l'existence d'une solution. En remarquant qu'une solution définit entre autres une section du fibré canonique (dans le cas twist), Taubes montre ensuite que la suite du lieu des zéros de ces sections converge vers une courbe J -holomorphe. Sans aucun effort supplémentaire que celui de constater que cette suite de zéros est invariante dans notre cas par l'involution c , nous obtenons le théorème 1.

Perspectives. Taubes [Ta2] a en fait établi que les invariants de Seiberg-Witten sur une variété symplectique sont égaux à un certain type d'invariants de Gromov-Witten. Ceux-ci comptent le nombre de courbes J -holomorphes de degré fixé passant par un certain nombre de points fixes. Dans un travail à venir, nous espérons montrer de façon analogue que les invariants réels que nous avons construits sont égaux à un certain type d'invariants de Welschinger [We], comptant des courbes J -holomorphes réelles.

Résumé des parties de l'article. Dans la première partie, nous construisons les invariants réels de Seiberg-Witten, dans un cadre général. Nous expliquons d'abord quelles sont les structures de Spin^c -réelles. Ensuite nous montrons que l'involution se relève aux objets naturellement associés à une structure de Spin^c -réelle : espaces de spineurs, espace des connexions sur l'espace des spineurs. Nous définissons les équations réelles de Seiberg-Witten, puis nous étudions les propriétés de l'espace des solutions, en particulier sa dimension. Dans la deuxième partie, nous montrons d'une part que dans une variété symplectique réelle, les invariants construits ne sont pas tous nuls, et d'autre part que quand l'invariant d'une structure de Spin^c est non nul, on peut associer à celle-ci une courbe J -holomorphe réelle.

1 Construction d'un invariant réel de Seiberg-Witten

Soit X une variété lisse de dimension 4 orientée, munie d'une involution c lisse préservant l'orientation. Il existe toujours une structure riemannienne compatible avec cette situation topologique :

Lemme 1 *L'ensemble $\text{Met}(X, c)$ des métriques riemanniennes pour lesquelles c est une isométrie est un convexe non vide.*

Démonstration. Il est clair que $\text{Met}(X, c)$ est un convexe. Montrons qu'il est non vide. L'ensemble des métriques riemanniennes sur X de volume 1 est un convexe compact, et l'application continue qui à une métrique g associe le tir en arrière c^*g laisse cet ensemble invariant. En effet,

$$\int_X \text{vol}_{c^*g}(x) = \int_X \det d_x c \cdot \text{vol}_g(c(x)) = \int_X \det d_x c \cdot \det d_{c(x)} c \cdot \text{vol}_g(x) = \int_X \text{vol}_g(x).$$

Le théorème de Schauder implique maintenant le résultat. \square

1.1 Structures réelles

1.1.1 Une remarque éclairante pour la suite

Soit $f : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ une application lisse définie sur le plan complexe. Si f est holomorphe, l'involution antilinéaire $\kappa(f)$ définie par $\kappa(f)(z) = \bar{f}(\bar{z})$ est également holomorphe. Si de plus f est invariante par κ , alors le lieu des zéros de f est une sous-variété analytique complexe réelle, c'est-à-dire invariante par conjugaison. La suite de cette section explique comment construire des équivalents de κ sur un fibré en droites, puis sur les objets associés à une structure de Spin^c .

1.1.2 Fibr en cercles c -rels

Soit Q un fibr principal en cercles. Il nous faut savoir quand il est possible de relever c en une involution antilinaire sur Q . Pour cela, nous avons besoin des groupes et du faisceau suivants :

$$\begin{aligned}\mathcal{G} &= \{f \in \Gamma(X, U(1))\} \\ r\mathcal{G} &= \{f \in \Gamma(X, U(1)), f \circ c = f\} \\ r\mathcal{G}_\alpha &= \{f \in \Gamma(U_\alpha, U(1)), f \circ c = f\}\end{aligned}$$

Remarque : Sans perte de gnralit, on a suppos et on supposera toujours que les ouverts de trivialisation U_α sont invariants par c .

Lemme 2 Soit Q un $U(1)$ -fibr principal sur X . L'application $c : X \rightarrow X$ se relve en une application $c_Q : Q \rightarrow c^*Q$ vrifiant

$$c_Q(\lambda\psi) = \bar{\lambda}c_Q(\psi)$$

pour toute application $\lambda \in \mathcal{G}$ et toute section $\psi \in \Gamma(Q)$ si et seulement si $c^*Q \otimes Q$ est trivial en tant qu'ement de $H^1(X, \mathcal{G})$. Il existe une telle application involutive si et seulement si $c^*Q \otimes Q$ est trivial en tant qu'ement de $H^1(X, r\mathcal{G})$. Dans ce dernier cas, l'ensemble de telles involutions est isomorphe $r\mathcal{G}$.

Démonstration . Si $h_{\alpha\beta} \in U(1)$ sont les fonctions de transition de $Q \in H^1(X, U(1))$, le fibr $c^*Q \otimes Q$ a pour fonctions de transitions $h_{\alpha\beta}(c)h_{\alpha\beta}$. Ces fonctions sont des lments du faisceau $r\mathcal{G}$, et donc dfinissent un lment de $H^1(X, r\mathcal{G})$.

Maintenant, soient ϵ_α des trivialisations locales de Q , telles que $\epsilon_\alpha = h_{\alpha\beta}\epsilon_\beta$. Si l'involution se relve, il existe des fonctions $\kappa_\alpha \in \Gamma(U_\alpha, U(1))$ telles que $c_Q(\epsilon_\alpha) = \kappa_\alpha\epsilon_\alpha(c)$. On a alors

$$\bar{h}_{\alpha\beta}(c)\kappa_\beta = \kappa_\alpha h_{\alpha\beta},$$

ce qui montre que le cocycle $\{h_{\alpha\beta}(c)h_{\alpha\beta}\}$ est nul dans $H^1(X, U(1))$, et donc que $c^*Q = -Q$. Si maintenant l'application c_Q est une involution, on a $\kappa_\alpha \in r\mathcal{G}_\alpha$, ce qui signifie cette fois que le cocycle $\{h_{\alpha\beta}(c)h_{\alpha\beta}\}$ est nul dans $H^1(X, r\mathcal{G})$. La rciproque suit la voie inverse. Enfin, soit c_Q un relvement involutif de $c : Q$. Il est facile de vrifier que toute autre relvement involutif est un produit de c_Q par un lment de $r\mathcal{G}$. \square

Définition 1 Un fibr Q est dit c -rel s'il existe une involution antilinaire de Q dans c^*Q .

Les propositions suivantes montrent que cette dfnition est naturelle :

Proposition 1 Soit (X, J) une varit presque complexe, et c une involution J -antiholomorphe. Si C est une courbe J -complexe plonge dans (X, J) , invariante par c , alors le $U(1)$ -fibr associ est c -rel.

Démonstration . Supposons d'abord que J est intgrable. Soient (f_α) des applications holomorphes irrductibles dfinissant localement C . L'antiholomorphie de c implique que $\bar{f}_\alpha(c)$ est holomorphe, et l'invariance de C par c implique que f_α et $\bar{f}_\alpha(c)$ s'annulent en même temps. Il existe donc des applications g_α holomorphes ne s'annulant pas et des entiers positifs m , telles que $\bar{f}_\alpha(c) = g_\alpha f_\alpha^m$. On a donc aussi

$$f_\alpha = \bar{g}_\alpha(c)\bar{f}_\alpha^m(c) = \bar{g}_\alpha(c)g_\alpha^m f_\alpha^{m^2}.$$

L'application $\bar{g}_\alpha(c)g_\alpha^m$ est holomorphe, donc l'égalité n'est possible que si $m = 1$. De plus $g_\alpha\bar{g}_\alpha(c)$ vaut 1 en dehors de C et donc partout. On a donc $g_\alpha/\bar{g}_\alpha(c) \in r\mathcal{G}_\alpha$. Maintenant, le cocycle

$$\{h_{\alpha\beta} = \frac{f_\alpha}{|f_\alpha|} \frac{|f_\beta|}{f_\beta}\}$$

dfnit le fibr en cercles associ C , et puisque $h_{\alpha\beta}(c)h_{\alpha\beta} = g_\beta/|g_\beta| \cdot |g_\alpha|/g_\alpha$, le fibr est c -rel.

Le cas gnral se ramne au cas intgrable aprs avoir remarqu qu'il est possible de construire une structure presque complexe intgrable sur U_α gale J aux points de C . \square

Proposition 2 Soit (X, J) une varit presque complexe munie d'une involution J -antiholomorphe. Alors le fibr anticanonique K^{-1} est c -rel.

Démonstration . Le fibr K^{-1} est identifi aux 2-covecteurs complexes de type $(0, 2)$. L'application $c_{K^{-1}}$ qui envoie ω sur $\bar{\omega} \circ dc^{-1}$ relve c , prserve K^{-1} , est antilinaire et involutive. \square

1.1.3 Une involution sur $\text{Spin}^c(X)$

Un fibr en cercles Q est c -rel si, entre autres, $c^*Q = -Q$. Avant de dfinir la notion de structure de Spin^c c -relle, nous rappelons la construction de l'involution sur $\text{Spin}^c(X)$ envoyant une structure de Spin^c \mathfrak{s} de fibr dterminant Q sur la structure de Spin^c $-\mathfrak{s}$ de fibr dterminant $-Q$.

Discussion locale. Ce paragraphe reprend l'exposé de Morgan dans son livre [Mo], pp. 100-102. Définissons d'abord la conjugaison complexe sur l'algèbre de Clifford complexe $Cl(4) \otimes \mathbb{C}$. Elle applique simplement e sur \bar{e} . Par induction sur $\text{Spin}^c(4) \subset Cl(4) \otimes \mathbb{C}$, on obtient la conjugaison sur $\text{Spin}^c(4)$.

On sait que $Cl(4)$ est isomorphe en tant qu'algèbre à $\text{Mat}(2, \mathbb{H})$, où \mathbb{H} est le corps des quaternions. Cet ensemble agit sur $\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$ par multiplication matricielle quaternionique à gauche, tandis que l'ensemble des complexes \mathbb{C} agit à droite par multiplication à droite par i . Maintenant, la multiplication à droite par j définit une application τ de $\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$ dans lui-même vérifiant pour tout $e \in Cl(4) \otimes \mathbb{C}$ et tout $s \in \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$

$$\tau(e \cdot s) = \bar{e} \cdot \tau(s).$$

Globalisation. Soit maintenant P le $\text{SO}(4)$ -fibré principal des repères orthonormés directs. Si \mathfrak{s} une structure de Spin^c , \mathfrak{s} est un revêtement double de $P \times_X Q$, o Q est le $\text{U}(1)$ -fibr dterminant de \mathfrak{s} . L'application induisant l'identit sur P et la conjugaison complexe sur Q dfinit par tir en arrire une nouvelle structure de Spin^c note $-\mathfrak{s}$. On remarque que le fibr dterminant de $-\mathfrak{s}$ est $-Q$. Il existe alors une application antilinéaire

$$\tau : \mathfrak{s} \rightarrow -\mathfrak{s}.$$

Cette application définit un isomorphisme antilinéaire

$$\tau_S : S(\mathfrak{s}) \rightarrow S(-\mathfrak{s}),$$

où $S(\mathfrak{s})$ est le fibré de spineurs $\mathfrak{s} \times_{\text{Spin}^c(4)} \mathbb{H} \oplus \mathbb{H} = S^+ \oplus S^-$. On a de plus par construction

$$\tau_S(e \cdot \psi) = \bar{e} \cdot \tau_S(\psi)$$

pour toute section e de $Cl(TX) \otimes \mathbb{C} \simeq TX \otimes \mathbb{C}$ et toute section ψ de $S(\mathfrak{s})$. Enfin, τ_S prserve la dcomposition en spineurs positifs et ngatifs.

1.1.4 Structures de Spin^c réelles

La différentielle dc définit un morphisme $dc : P \rightarrow c^*P$ relevant $c : X \rightarrow X$. Appelons $\mathcal{C}_{\mathfrak{s}}$ l'ensemble des relèvements de dc à \mathfrak{s} antilinéaires.

Proposition 3 Soit \mathfrak{s} une structure de Spin^c et Q son fibré déterminant. Si Q est c -rel, \mathfrak{s} définit naturellement un élément μ de $H^1(X, \mathbb{Z}_2)$, tel que $\mu = 0$ si et seulement si $c^*\mathfrak{s} = -\mathfrak{s}$. Dans ce cas $\mathcal{C}_{\mathfrak{s}} \neq \emptyset$, et il existe un lment $\epsilon(\mathfrak{s}) \in \mathbb{Z}_2$ tel que $\forall c_{\mathfrak{s}} \in \mathcal{C}_{\mathfrak{s}}$, $c_{\mathfrak{s}}^2 = \epsilon(\mathfrak{s})\text{Id}$.

Démonstration . Soit e_{α} une trivialisatoin de P , et $g_{\alpha\beta}$ les fonctions de transition valeurs dans $\text{SO}(4)$ vrifiant $e_{\beta} = e_{\alpha}g_{\alpha\beta}$. Nommons de plus \tilde{e}_{α} des trivialisatoin du fibr \mathfrak{s} , $\tilde{g}_{\alpha\beta}$ les fonctions de transitions de \mathfrak{s} et $h_{\alpha\beta} = \det \tilde{g}_{\alpha\beta}$ celles de Q . Supposons enfin que les \tilde{e}_{α} (resp. $\tilde{g}_{\alpha\beta}$) sont des relevés de e_{α} (resp. $g_{\alpha\beta}$). Soit k_{α} des applications valeurs dans $\text{SO}(4)$, telles que

$$d_x c(e_{\alpha}) = e_{\alpha}(c(x))k_{\alpha}^{-1}(x),$$

et κ_α des applications appartenant $r\mathcal{G}_\alpha$ telles que

$$h_{\alpha\beta}(c) = \kappa_\alpha^{-1} \bar{h}_{\alpha\beta} \kappa_\beta.$$

Choisissons des relevés arbitraires \tilde{k}_α à $\text{Spin}^c(4)$ des fonctions $k_\alpha \times \kappa_\alpha$. Les cocycles

$$\tilde{k}_\alpha^{-1} (\tilde{g}_{\alpha\beta} \bar{h}_{\alpha\beta}) \tilde{k}_\beta$$

et $\tilde{g}_{\alpha\beta}(c)$ ont même image par projection sur $\text{SO}(4) \times \text{U}(1)$, si bien qu'ils ne diffèrent que d'un signe $\mu_{\alpha\beta}$. Leur rapport définit donc un élément $\{\mu_{\alpha\beta}\} \in H^1(X, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. Si μ est nul, il existe des constantes $\eta_\alpha \in \{\pm 1\}$ telles que $\mu_{\alpha\beta} = \eta_\alpha / \eta_\beta$. Alors l'application

$$c_\mathfrak{s}(\tilde{e}_\alpha) = \tilde{e}_\alpha(c) \tilde{k}_\alpha^{-1} \eta_\alpha$$

est bien définie. En projetant sur les deux facteurs $\text{SO}(4)$ et $\text{U}(1)$, on constate que $c_\mathfrak{s}^2 = \pm \text{Id}$. \square

Définition 2 *Sous les hypothèse de la proposition précédente, on dira que \mathfrak{s} est c -relle si $\epsilon(\mathfrak{s}) = 1$.*

1.1.5 Structure relle et fibr de spineurs

Proposition 4 *Soit \mathfrak{s} une structure de Spin^c c -relle. Alors il existe une isométrie antilinéaire $\kappa_S : \Gamma(S) \rightarrow \Gamma(S)$ stable pour les deux sous-fibres S^+ et S^- , et induisant sur $\Gamma(\text{End}(S)) \simeq \Omega^*(X, \mathbb{C})$ le tir en arrière barr :*

$$\kappa_\Omega(\omega) = \overline{c^* \omega}.$$

Démonstration . On a vu qu'il existait une application anticomplexe $\tau_S : S(\mathfrak{s}) \rightarrow S(-\mathfrak{s})$ induisant la conjugaison sur les formes complexes sur X . Puisque \mathfrak{s} est relle, on a d'autre part $-\mathfrak{s} = c^* \mathfrak{s}$, ce qui donne un isomorphisme $\nu_S : S(-\mathfrak{s}) \rightarrow S(c^* \mathfrak{s})$ tel que pour tout champ de vecteur e ,

$$\nu_S(e \cdot \psi) = dc(e) \cdot \nu_S(\psi).$$

Au total, on obtient une application $c_S : S(\mathfrak{s}) \rightarrow S(c^* \mathfrak{s})$ telle que l'application

$$\begin{aligned} \kappa_S : \Gamma(S) &\rightarrow \Gamma(S) \\ \kappa_S(\psi) &= c_S \circ \psi \circ c \end{aligned}$$

vérifie, en identifiant de façon naturelle TX avec T^*X ,

$$\kappa_S(\omega \cdot \psi) = \kappa_\Omega(\omega) \cdot \kappa_S(\psi).$$

Enfin par construction l'application laisse stable les deux composantes S^\pm de S . \square

1.1.6 Involution sur l'espace des connexions

Commenons par l'espace $\mathcal{A}(Q)$ des connexions unitaires d'un $\text{U}(1)$ -fibr Q .

Proposition 5 *Soit Q un $U(1)$ -fibr principal c -rel. Alors il existe une involution antilinéaire $\kappa_{\mathcal{A}}$ de $\mathcal{A}(Q)$ dans lui-même, telle que la courbure $F_{\kappa_{\mathcal{A}}(A)}$ vrifie*

$$F_{\kappa_{\mathcal{A}}(A)} = \kappa_\Omega(F_A).$$

Démonstration . Soit A une connexion hermitienne sur Q . Si ϵ_α est une trivialisaton locale de Q , il existe des 1-formes A_α valeurs dans \mathbb{R} telles que $A\epsilon_\alpha = iA_\alpha\epsilon_\alpha$. Par ailleurs, puisque Q est c -rel, il existe des fonctions κ_α valeurs dans $r\mathcal{G}_\alpha$ telles que $c_Q\epsilon_\alpha(c) = \epsilon_\alpha\kappa_\alpha^{-1}$. Soit $\kappa_{\mathcal{A}}(A)$ la connexion définie par

$$\kappa_{\mathcal{A}}(A)\epsilon_\alpha = (-ic^*A_\alpha + d \log \kappa_\alpha)\epsilon_\alpha.$$

On vrifie facilement que cette connexion est bien définie et qu'elle est involutive. La courbure de A est $F_A = d(iA_\alpha) = d(iA_\beta)$, et donc la courbure de son image est $d(-ic^*A_\alpha) = \kappa_\Omega(F_A)$. \square

Rappelons la proposition suivante :

Proposition 6 Soit \mathfrak{s} une structure de $Spin^c$ et Q son fibré déterminant, ainsi qu'une connexion unitaire A sur Q . Alors il existe une unique connexion ∇_A sur l'espace des spineurs induisant la connexion de Levi-Civit ∇ sur P et la connexion A sur Q .

Lemme 3 Soit \mathfrak{s} une structure de $Spin^c$ c -réelle, et Q son fibré déterminant. Pour toute connexion $A \in \mathcal{A}(Q)$ on a les relations de commutation suivantes :

$$\begin{aligned}\nabla &= \kappa_\Omega \nabla \kappa_\Omega, \\ \nabla_{\kappa_A(A)} &= \kappa_S \nabla_A \kappa_S.\end{aligned}$$

Démonstration . Soient (e_i) une section orthonorme de TX sur U_α . La connexion de Levi-Civit s'écrit

$$\nabla e_i = \sum_{j=1}^4 \omega_{ij} e_j,$$

où ω_{ij} sont des 1-formes réelles. Composons par le tir en arrière de c :

$$c^* \nabla e_i = \sum c^* \omega_{ij} c^* e_j.$$

Nous avons besoin du lemme suivant :

Lemme 4 Soient $e'_i = c^* e_i$. Si ω'_{ij} est l'ensemble des 1-formes définissant la connexion de Levi-Civit dans la base orthonorme e'_i , alors on a $\omega'_{ij} = c^* \omega_{ij}$.

Démonstration . En effet, si $\nabla e_j(e_i) = \sum \Gamma_{ij}^k e_k$, avec

$$\Gamma_{i,j}^k = \frac{1}{2} g^{il} (g_{jl,k} + g_{kl,j} - g_{jk,l}),$$

où g^{il} définit la métrique duale et $g_{jl,k} = dg_{jl}(e_k)$. Dans la trivialisatoin e'_i , les g'_{ij} sont égaux à g_{ij} car c est une isométrie, et donc $g'_{jl,k} = c^* g_{jl,k}$. Au total, on constate que $\Gamma_{ij}^{k'} = c^* \Gamma_{ij}^k$. \square

Grâce à ce lemme, on obtient donc aisément que $\kappa_\Omega \nabla \kappa_\Omega = \nabla$. Maintenant soit $A \in \mathcal{A}(Q)$. La connexion spinorielle ∇_A s'écrit en coordonnées

$$\nabla_A = A_\alpha \text{Id} + \sum_{i=1}^4 \omega_{i,j} e_i \cdot e_j,$$

où \cdot est la multiplication de Clifford. Grâce au résultat sur la connexion de Levi-Civit, il est alors aisé de constater que $\nabla_{\kappa_A(A)} = \kappa_S \nabla_A \kappa_S$. \square

1.2 Equations réelles de Seiberg-Witten

Les équations que nous définissons sont celles de Seiberg-Witten, mais nous imposons aux inconnues, c'est-à-dire un spineur positif et une connexion, d'être invariants par l'involution réelle. Rappelons, avant de décrire l'espace des solutions, les équations classiques.

1.2.1 Les structures supplémentaires

Formes autoduales. Rappelons que si $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ est une base orthonormale locale directe, l'opérateur de Hodge est défini de la façon suivante :

$$\begin{aligned} * : \Lambda^2 TX &\rightarrow \Lambda^2 TX \\ e_i \wedge e_j &\rightarrow e_r \wedge e_s \end{aligned}$$

où (i, j, r, s) est une permutation paire de $(1, 2, 3, 4)$. Par ailleurs via l'isomorphisme entre $\Lambda^* TX \otimes \mathbb{C}$ et $\text{End}(S)$, le sous-espace $\Lambda^2_+ TX \otimes i\mathbb{R}$ s'identifie avec les endomorphismes de S^+ hermitiens de trace nulle.

Oprateur de Dirac. Soit ψ un spineur, c'est dire une section du fibr S , et ∇_A une connexion sur S . La drive $\nabla_A\psi$ est une section de $\Gamma(T^*X \otimes S)$. On peut, en utilisant l'identification entre $T^*X \otimes \mathbb{C}$ et $\text{End}(S)$, dfinir maintenant l'oprteur de Dirac $D_A : \Gamma(S) \rightarrow \Gamma(S)$. L'oprteur envoie une section de S^\pm sur une section de S^\mp . En coordonnes, on trouve

$$D_A\psi = \sum_{i=1}^4 e_i \cdot \nabla_{e_i}\psi.$$

L'application quadratique q . Soit ψ un spineur positif, c'est dire une section de S^+ . Le spineur dfini une 2-forme autoduale $q(\psi)$ à valeurs complexes pures (ou un endomorphisme de S^+ hermitien de trace nulle) en posant

$$q(\psi) = \psi \otimes \bar{\psi} - \frac{|\psi|^2}{2} \text{Id}.$$

Dans une base locale de S^+ , si $\psi = (\alpha, \beta)$, on a

$$q(\psi) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} |\alpha|^2 - |\beta|^2 & 2\alpha\bar{\beta} \\ 2\bar{\alpha}\beta & -(|\alpha|^2 - |\beta|^2) \end{pmatrix}.$$

1.3 Les quations

Soit X une varit compacte oriente riemannienne munie d'une structure de Spin^c . On appelle Q le fibr dterminant associ, et $\Gamma^+ \times \mathcal{A}$ le produit $\Gamma(S^+) \times \mathcal{A}(Q)$. Pour toute 2-forme h autoduale, les quations perturbées de Seiberg-Witten ont pour inconnues un spineur positif ψ et une connexion unitaire A sur Q :

$$\begin{aligned} (\psi, A) &\in \Gamma^+ \times \mathcal{A} \\ D_A\psi &= 0 \\ F_A^+ &= q(\psi) + ih, \end{aligned}$$

o F_A^+ est la partie autoduale de la courbure de la connexion A .

1.4 Les quations relles

Les quations relles de Seiberg-Witten que nous dfinissons sont les mêmes, sauf que l'on impose ψ et A d'être invariants par les involution κ_S et $\kappa_{\mathcal{A}}$ construites prcedemment ; si

$$\begin{aligned} r\Gamma^\pm &= \{\psi \in \Gamma^\pm, \kappa_S\psi = \psi\} \\ r\mathcal{A} &= \{A \in \mathcal{A}(Q), \kappa_{\mathcal{A}}(A) = A\} \\ a\Omega^* &= \{\omega \in \Omega^*(X, \mathbb{R}), \kappa_\Omega\omega = -\omega\} \end{aligned}$$

les quations $E_h(\mathfrak{s}, c)$ sont dfinies par

$$\begin{aligned} (\psi, A) &\in r\Gamma^+ \times r\mathcal{A} \\ D_A\psi &= 0 \\ F_A^+ &= q(\psi) + ih, \end{aligned}$$

o h est une 2-forme auto-duale anti- c -relle, c'est dire $h \in a\Omega_+^2$. On notera $M_h(\mathfrak{s}, c)$ l'ensemble des solutions de $E_h(\mathfrak{s}, c)$.

Groupe de jauge. Le sous-groupe $r\mathcal{G} \subset \mathcal{G}$ agit sur l'espace $r\Gamma^+ \times r\mathcal{A}$ de la faon suivante :

$$f \cdot (\psi, A) = (g\psi, A + gd(g^{-1})).$$

Il est facile de vrifier qu'il laisse invariant $M_h(\mathfrak{s}, c)$. Par ailleurs le stabilisateur d'un lment (ψ, A) est trivial si ψ n'est pas le spineur nul, et est gal \mathbb{Z}_2 sinon. Dans le premier cas on dira que le couple (ψ, A) est irrductible. Enfin, on note $\mathcal{M}_h(\mathfrak{s}, c)$ l'ensemble des classes d'quivalences de $M_h(\mathfrak{s}, c)$ sous l'action de $r\mathcal{G}$.

1.5 Propriétés de l'ensemble des solutions

1.5.1 Le thorme principal

Définition 3 On appelle $a\mathcal{H}^1$ (resp. $a\mathcal{H}_+^2$) l'espace des 1-formes (resp. 2-formes autoduales) reelles harmoniques anti-c-relles, i.e $a\mathcal{H}^1 = \mathcal{H}^1 \cap a\Omega^1$ (resp. $a\mathcal{H}_+^2 = \mathcal{H}_+^2 \cap a\Omega^2$).

Théorème 2 Soit (X, c, g) une variété riemannienne compacte telle que $\dim a\mathcal{H}_+^2 > 0$. Alors pour toute 2-forme h anti-c-relle autoduale gnrique, et toute structure de $Spin^c$ c-relle \mathfrak{s} , l'espace $\mathcal{M}_h(\mathfrak{s}, c)$ est une variété compacte orientée de dimension

$$d = \dim a\mathcal{H}^1 - \dim a\mathcal{H}_+^2 + \frac{1}{8}(c_1(Q)^2 - \tau),$$

où τ est la signature de X et Q le fibré déterminant de \mathfrak{s} .

Si d est strictement positive, choisissons un point base dans X , et soit $r\mathcal{G}_0$ l'ensemble des éléments de $r\mathcal{G}$ valant 1 en ce point. Soit $\mathcal{M}_h^0(\mathfrak{s}, c)$ le quotient de $\mathcal{M}_h(\mathfrak{s}, c)$ par ce sous-groupe. Alors la projection \mathcal{M}^0 sur \mathcal{M} définit un fibré $U(1)$ -principal. Notons μ la première classe de Chern de ce fibré. Nous pouvons maintenant définir les invariants reels de Seiberg-Witten.

Définition 4 • Si la dimension d ci-dessus est strictement négative ou impaire, $SW_h(\mathfrak{s}, c) = 0$.

- Si d est nul, $SW_h(\mathfrak{s}, c)$ est le nombre de points de $\mathcal{M}_h(\mathfrak{s}, c)$ comptés avec leur signe.
- Si d est strictement positive et paire,

$$SW_h(\mathfrak{s}, c) = \int_{\mathcal{M}_h(\mathfrak{s}, c)} \mu^{d/2},$$

Proposition 7 Si $\dim a\mathcal{H}_+^2 > 1$, l'invariant défini ci-dessus est indépendant de la perturbation h et de la métrique pour laquelle c est isométrique. On appelle $SW(\mathfrak{s}, c)$ cet entier relatif. De plus, si f est un difféomorphisme sur X on a la relation :

$$SW(\mathfrak{s}, fcf^{-1}) = SW(f^*\mathfrak{s}, c).$$

Nous allons démontrer ce thorme en plusieurs temps. D'abord nous analyserons les problèmes d'indices, ensuite celui de la transversalité, et enfin celui de la compacité.

1.5.2 L'indice

Le lemme suivant, basé sur les relations de covariances du lemme 3, établit la covariance des équations de Seiberg-Witten sous l'action des involutions κ_S et $\kappa_{\mathcal{A}}$.

Lemme 5 Soit l'application f définie par

$$\begin{aligned} f : \Gamma^+ \times \mathcal{A} \times \Omega_+^2 &\rightarrow \Gamma^- \times i\Omega_+^2 \\ (\psi, A, h) &\mapsto (D_A\psi, F_A^+ - q(\psi) - ih). \end{aligned}$$

On a alors $f \circ (\kappa_S, \kappa_{\mathcal{A}}, \kappa_{\Omega}) = (\kappa_S, \kappa_{\Omega}) \circ f$. On peut donc définir par restriction l'application :

$$f_r : r\Gamma^+ \times r\mathcal{A} \times r\Omega_+^2 \rightarrow r\Gamma^- \times r\Omega_+^2,$$

Démonstration du lemme. Rappelons en effet que $\nabla_A\psi$ est valeurs dans $T^*X \otimes S^+$, et D_A fait simplement agir multiplication de Clifford de T^*X sur S^+ . On a donc

$$D_A = A_\alpha \cdot \text{Id} + \sum_{i=1}^4 \omega_{i,j} \cdot e_i \cdot e_j.$$

Grâce au lemme 3, on obtient que $\kappa_S D_A = D_A \kappa_S$. Pour la deuxième coordonnée de l'application, il suffit d'abord de remarquer que d'une part $F_A = dA_\alpha$, ensuite que $(\kappa_{\Omega} F)^+ = \kappa_{\Omega}(F^+)$ puisque c est une isométrie. Montrons enfin que $q \circ \kappa_S = \kappa_{\Omega} \circ q$. On a $q(\psi) = \psi \otimes \bar{\psi} - |\psi|^2 \text{Id}$, ce qui donne

$$q(\kappa_S\psi) = \kappa_S\psi \otimes \overline{\kappa_S\psi} - |\kappa_S\psi|^2 \text{Id} = \kappa_{\Omega}(\psi \otimes \bar{\psi}) - c^*|\psi|^2 \kappa_{\Omega}(\text{Id}) = \kappa_{\Omega}(q(\psi)).$$

□

Etudions maintenant la linéarisation de f_r . Remarquons d'abord les galits suivantes concernant les tangents :

$$\begin{aligned} T(r\Gamma^+ \times r\mathcal{A} \times a\Omega_+^2) &= r\Gamma^+ \times ia\Omega^1 \times a\Omega_+^2 \\ T(r\Gamma^- \times ia\Omega_+^2) &= r\Gamma^- \times ia\Omega_+^2. \end{aligned}$$

La linéarisation de f_r donne :

$$\begin{aligned} df_r : T(r\Gamma^+ \times r\mathcal{A} \times a\Omega_+^2) &\rightarrow T(r\Gamma^- \times ia\Omega_+^2) \\ (\psi', a, h') &\mapsto (D_A(\psi') - ia \cdot \psi ; (ida)^+ - 2q(\psi, \psi') - ih'). \end{aligned}$$

L'algèbre de Lie du groupe de jauge $r\mathcal{G}$ est par ailleurs $ia\Omega^0$. Nous avons donc calculer l'indice du complexe suivant, tir de la linéarisation en une solution (ψ, A) de l'action de $r\mathcal{G}$ et des quations relles de Seiberg-Witten :

$$ia\Omega^0 \rightarrow r\Gamma^+ \times ia\Omega^1 \times a\Omega^2 \xrightarrow{df_r} r\Gamma^- \times ia\Omega_+^2,$$

la première flèche tant donne par $f \mapsto (-f\psi, 2df, 0)$. L'indice d'un opérateur ne dépendant que de la partie principale de l'opérateur, le complexe elliptique précédent se résume en la somme de deux complexes, $a\Omega^0 \xrightarrow{d} a\Omega^1 \xrightarrow{d^+} a\Omega_+^2$, et $0 \rightarrow r\Gamma^+ \xrightarrow{D_A} r\Gamma^-$.

Afin de calculer l'indice du second complexe, on remarque que la multiplication complexe droite sur Γ^+ envoyant ψ sur $\psi \cdot i$ envoie $r\Gamma^\pm$ sur $a\Gamma^\pm$. Cette application est linéaire et inversible, et commute avec l'opérateur D_A . On obtient donc $\text{Ind } D_A|_{r\Gamma^+} = \frac{1}{2} \text{Ind } D_A$.

En ce qui concerne l'indice du premier complexe, nous avons le

Lemme 6 *L'indice du complexe $a\Omega^0 \xrightarrow{d} a\Omega^1 \xrightarrow{d^+} a\Omega_+^2$ est gal $-\dim a\mathcal{H}^1 + \dim a\mathcal{H}_+^2$.*

Démonstration . L'indice du complexe est gal la somme alterne des dimensions des groupes de cohomologie associés la suite. Le premier groupe est simple calculer : si f est une fonction vérifiant la fois $df = 0$ et $c^*f = -f$, f est la constante nulle.

Si α appartient $\text{coker } d|_{a\Omega^0} \cap \ker d^+$, alors α est orthogonale $d(a\Omega^0)$. Si f est une fonction quelconque valeurs relles, $f = f_r + f_a$, o $c^*f_r = f_r$ et $c^*f_a = -f_a$. On a alors

$$(\alpha, df) = (\alpha, df_r) = (c^*\alpha, c^*df_r) = (-\alpha, df_r) = 0.$$

Cela signifie que $\delta\alpha = \star d \star \alpha = 0$. Puisque $2d^+\alpha = d\alpha + d \star \alpha$, α est en fait harmonique. Le second groupe de cohomologie est donc $a\mathcal{H}^1$.

Calculons maintenant le troisième groupe de cohomologie du complexe. Si $\omega \in a\Omega_+^2$ est dans $\text{coker } d_{|a\Omega^1}^+$, on démontre comme précédemment qu'il est en fait orthogonal $d^+\Omega^1(X, \mathbb{R})$, ce qui ajout l'autodualité de ω implique que ω est harmonique, et que le troisième groupe est $a\mathcal{H}_+^2$. □

1.6 Transversalité

Tout comme dans le cas classique, on démontre d'abord grâce au thorme de Sard-Smale que pour une perturbation h gnrique, $\mathcal{M}_h(\mathfrak{s}, c)$ est une variété lisse de la dimension d , aux points *irréductibles*. L'élément vérifier dans notre cas est que df_r est surjective aux solutions irréductibles de $E_h(\mathfrak{s}, c)$. Ensuite, l'élimination des solutions irréductibles se fait par le lemme suivant, o la condition $\dim a\mathcal{H}_+^2 > 0$ est utilisée.

Lemme 7 *Si $\dim a\mathcal{H}_+^2 > 0$, alors pour toute perturbation h gnrique, pour toute structure \mathfrak{s} de Spin^c relle, il n'y a pas de solution réductible de $E_h(\mathfrak{s}, c)$.*

Démonstration . S'il existait une solution réductible, on aurait $F_A^+ = ih$, avec A et ih c -rels. En écrivants $A = A_0 + ia$, avec $a \in a\Omega^1$ et A_0 une connexion base sur le fibré déterminant, on constate que l'image par F_A^+ de l'ensemble des solutions relles réductibles est un espace affine. Si la perturbation autoduale ih est orthogonale cette image, on démontre comme précédemment que h est harmonique. La codimension de l'image est donc $\dim a\mathcal{H}_+^2$. □

1.7 Orientation

Nous renvoyons au livre de Morgan [Mo] pour la discussion sur l'orientation dans le cas classique, et qui s'applique *mutatis mutandis* notre situation. Nous ne donnons que la

Proposition 8 *Le choix d'orientations sur $a\mathcal{H}^1$ et sur $a\mathcal{H}_+^2$ determine une orientation sur $\mathcal{M}_h(\mathfrak{s}, c)$ pour toute perturbation h .*

1.8 Compacit

La compacit des varits $\mathcal{M}_h(\mathfrak{s}, c)$ se dduit de la compacit du cas classique en remarquant que la condition d'être c -rel est une condition ferme.

1.9 Une involution dans la thorie

Tout comme dans le cas classique, on a grâce l'involution sur $\text{Spin}^c(X)$ dcrite au paragraphe 1.1.3 la

Proposition 9 *Soit \mathfrak{s} une structure de Spin^c c -relle. Alors $-\mathfrak{s}$ est aussi c -relle, et de plus $SW(\mathfrak{s}, c) = \pm SW(-\mathfrak{s}, c)$.*

Démonstration . Si $c_{\mathfrak{s}}$ est une involution antilinaire dfinie sur \mathfrak{s} , et τ est l'application antilinaire dfinie prcdemment de \mathfrak{s} dans $-\mathfrak{s}$, alors $c_{-\mathfrak{s}} = \tau \circ c_{\mathfrak{s}} \circ \tau$ dfnit une structure relle sur $-\mathfrak{s}$. De plus l'application

$$\begin{aligned} \Gamma^+(\mathfrak{s}) \times \mathcal{A}(Q) &\rightarrow \Gamma^+(-\mathfrak{s}) \times \mathcal{A}(-Q) \\ (\psi, A) &\mapsto (\tau_S(\psi), A^*) \end{aligned}$$

induit un isomorphisme entre les solutions de $SW_h(\mathfrak{s}, c)$ et celles de $SW_{-h}(-\mathfrak{s}, c)$. On en dduit le rsultat. \square

2 Calcul de l'invariant pour une varit symplectique

Comme dans le cas classique, les travaux de Taubes [Ta1] permettent de calculer les invariants rels de Seiberg-Witten pour certaines structures de Spin^c sur une varit symplectique relle.

2.1 Structures de Spin sur une varit symplectique

2.1.1 Structure canonique

Soit (X, ω, J) une varit symplectique munie d'une structure presque complexe J compatible avec ω , c'est dire $g = \omega(\cdot, J\cdot)$ est une mtrique riemanienne. Grâce J , le groupe de transformation $\text{SO}(4)$ de P se rduit $\text{U}(2)$ et permet de dfinir une structure naturelle de Spin^c \mathfrak{s}_0 . En effet, le plongement $j : \text{U}(2) \rightarrow \text{Spin}^c(4)$ dfini par

$$j(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \det A & 0 \\ 0 & 0 & A \end{pmatrix}$$

permet de relever les fonctions de transitions $g_{\alpha\beta} \in \text{U}(2)$ des fonctions de transitions $\tilde{g}_{\alpha\beta} \in \text{Spin}^c(4)$ dfnissant une structure de Spin^c \mathfrak{s}_0 , de fibr dterminant le fibr anticanonique $K^{-1} = \Lambda^{0,2}$. Toutes les autres structures de Spin^c se dduisent de la canonique par la

Proposition 10 *Soit \mathcal{L} un fibr $U(1)$ -principal sur X , et L son fibr en droites complexes associ. Alors $\mathfrak{s}_0 \otimes \mathcal{L}$ est une structure de Spin^c et on a les relations :*

$$\begin{aligned} S^+(L) &= L \oplus K^{-1} \otimes L \\ S^-(L) &= \Lambda^{0,1} \otimes L, \\ \det S^\pm(L) &= K^{-1} \otimes L^2. \end{aligned}$$

De plus, toute structure de Spin^c est de la forme prcdente.

2.1.2 Structures reelles

Nous pouvons, dans ce cadre, expliciter quelques structures naturelles. Donnons d'abord l'action de l'algèbre de Clifford $\Omega(X, \mathbb{C})$ sur $S^\pm(L)$. Si e est un champ de vecteur de TX qu'on identifie avec son dual par la métrique, et $s \in \Omega^{0,*}$, on a

$$e \cdot s = \sqrt{2}(e^{0,1} \wedge s - e^{0,1} \lrcorner s),$$

où \lrcorner est l'opérateur de contraction.

Ensuite soit ∇_C la connexion de Chern sur TX . Cette connexion vérifie $\nabla_C g = 0$ ainsi que $\nabla_C J = 0$. Sa torsion est exactement le tenseur de Nijenhuis, si bien que ∇_C est la connexion de Levi-Civita dans le cas Kähler. ∇_C induit donc une connexion A_0 sur le fibré anticanonique.

Supposons maintenant que la variété symplectique est réelle, c'est-à-dire qu'il existe une involution c antisymplectique et J -antiholomorphe. Grâce à la proposition précédente, on a le

Lemme 8 *Soit $\mathfrak{s} = \mathfrak{s}_0 \otimes \mathcal{L}$ une structure de $Spin^c$. Alors \mathfrak{s} est c -relle si et seulement si \mathcal{L} est c -relle. En particulier, \mathfrak{s}_0 est c -relle, et la connexion ∇_{A_0} est c -réelle. Enfin, l'opérateur de Dirac D_{A_0} vérifie :*

$$\begin{aligned} D_{A_0} : \Omega^0 \oplus \Omega^{0,2} &\rightarrow \Omega^{0,1} \\ (\alpha, \beta) &\mapsto \bar{\partial}\alpha + \bar{\partial}^*\beta \end{aligned}$$

Démonstration. Si $\kappa_{\mathcal{L}}$ est une involution c -relle sur \mathcal{L} , l'application

$$\begin{aligned} \kappa_S : \Gamma^\pm(L) &\rightarrow \Gamma^\pm(L) \\ \omega \otimes s &\mapsto \kappa_\Omega(\omega) \otimes \kappa_{\mathcal{L}}(s) \end{aligned}$$

est une involution antilinéaire. En remarquant que l'action de l'algèbre explicitée plus haut commute avec κ_Ω , on trouve que $\kappa_\Omega(\omega \cdot \psi) = \kappa_\Omega(\omega) \cdot \kappa(\psi)$.

La connexion de Chern ∇_C est proportionnelle à $\nabla + \frac{1}{2}J\nabla J$. On en déduit que tout comme la forme de Levi-Civita, ∇_C commute avec κ_Ω . En utilisant le lemme 3, on trouve que $\kappa_{\mathcal{A}}(A_0) = \kappa_S A_0 \kappa_S = \kappa_\Omega A_0 \kappa_\Omega = \kappa_\Omega^2 A_0 = A_0$, et donc que A_0 est réelle. Enfin, on trouvera dans [Ni] tous les détails concernant la forme de Chern ainsi que la démonstration de l'égalité entre D_{A_0} et $\bar{\partial} + \bar{\partial}^*$. \square

2.2 Calcul de l'indice

Rappelons que la dimension de l'espace des solutions réelles est égale à $-\dim a\mathcal{H}^1 + \dim a\mathcal{H}_+^2 + \frac{1}{2}\text{Ind } D_A$. Dans le cas d'une structure réelle sur une variété symplectique, on a un calcul simple de la première partie de l'indice :

Lemme 9 *Soit (X, ω, J, c) une variété symplectique réelle compacte de dimension 4. On a $\dim a\mathcal{H}^1 = \frac{1}{2}b_1$ et $\dim a\mathcal{H}_+^2 = \frac{1}{2}(1 + b_+)$.*

Démonstration. Pour calculer la dimension de $a\mathcal{H}^1$, remarquons que l'application

$$\alpha \mapsto J^*\alpha = \star(\omega \wedge \alpha)$$

tablit un isomorphisme entre $a\Omega^1$ et $r\Omega^1$. En effet, si $c^*\alpha = \alpha$, on a $c^*(J^*\alpha) = -J^*c^*\alpha = -J^*\alpha$. Maintenant si α est harmonique, $J^*\alpha$ l'est aussi, car ω est harmonique. On a donc la décomposition

$$\mathcal{H}^1 = a\mathcal{H}^1 \oplus r\mathcal{H}^1.$$

Cela implique d'une part que b_1 est pair, d'autre part que $\dim a\mathcal{H}^1 = \frac{1}{2}b_1$.

Il nous reste donc à calculer la dimension de $a\mathcal{H}_+^2$. Pour cela, rappelons la décomposition des 2-formes autoduales :

$$\Omega_+^2(X, \mathbb{R}) = \Omega^0(X, \mathbb{R}) \cdot \omega \oplus \Omega^{0,2},$$

où ω est la forme symplectique et $\Omega^{0,2}$ l'espace (ici considéré comme espace vectoriel sur \mathbb{R}) des $(0,2)$ -formes complexes sur X . Puisque c est J -antiholomorphe, l'application $\alpha \mapsto c^*\alpha$ envoie $\Omega^{0,2}$ sur

$\Omega^{2,0} = \Omega^{0,2}$ en tant que espaces rels. Si $\alpha \in \Omega^{2,0}$ est anti- c -relle et ferme, $J^*\alpha$ est c -relle, ferme et reste dans $\Omega^{2,0}$. On a donc un isomorphisme d'espace rels :

$$\Omega^{2,0} \cap \ker d = a\Omega^{2,0} \cap \ker d \oplus r\Omega^{2,0} \cap \ker d.$$

L'egalit $c^*\omega = -\omega$ implique alors que $a\mathcal{H}_\pm^2 \cap \mathbb{R}\omega = \mathbb{R}\omega$. On a donc $\dim a\mathcal{H}_\pm^2 = 1 + \frac{1}{2} \dim(\Omega^{2,0} \cap \ker d)$. Sachant que $\dim \mathcal{H}_\pm^2 = 1 + \dim(\Omega^{2,0} \cap \ker d)$, on obtient $\dim a\mathcal{H}_\pm^2 = \frac{1}{2}(1 + b_+)$. \square

2.3 Calcul effectifs des invariants

Nous pouvons noncer maintenant le thorme principal concernant les varits symplectiques :

Théorème 3 *Soit (X, ω, J, c) une varit symplectique compacte relle, vrifiant $b_+ > 1$, et K son fibr canonique. Alors $SW(\mathfrak{s}_0, c) = \pm 1$ et $SW(\mathfrak{s}_0 \otimes K, c) = \pm 1$.*

Démonstration . Remarquons d'abord que la proposition 8 nous permet de ne dmontrer que la premiere galit. La preuve est prcisment celle du cas classique. Il faut simplement remarquer que les perturbations choisies dans la preuve et la ou les solutions élémentaires trouvées sont c -relles. Nous rappelons uniquement les ides de la dmonstrations qui suffisent à établir le résultat.

La perturbation h choisie est $ih = F_{A_0}^+ - \frac{i}{4}\rho^2\omega$, o ρ est une constante strictement positive destine être trs grande. La connexion A_0 est c -réelle, donc $\kappa_\Omega(F_{A_0}^+) = F_{A_0}^+$. Puisque de plus c définit une structure réelle sur la variété symplectique, on a $\kappa_\Omega(\omega) = -\omega$, et donc la perturbation choisie est c -relle. Les quations tudies sont donc, dans le cas plus gnral o L n'est pas forcment triviale :

$$\begin{aligned} (\psi, A) &\in r\Gamma^+ \times r\mathcal{A} \\ D_A\psi &= 0 \\ F_A^+ &= q(\psi) + F_{A_0}^+ - \frac{i}{4}\rho^2\omega, \end{aligned}$$

Sur le fibr dterminant $Q = K^{-1} \otimes L^2$, une connexion A peut s'crire $A = A_0 \otimes B^2$, o B est une connexion sur L . On utilise B comme nouvelle variable au lieu de A . Les quations dans le cas symplectique presque complexe se transforment en :

$$\begin{aligned} ((\alpha, \beta), B) &\in r\Omega^0(L) \oplus r\Omega^{0,2}(L) \times r\mathcal{A}(L) \\ \bar{\partial}_B\alpha + \bar{\partial}_B^*\beta &= 0 \\ (F_B^+)^{(1,1)} &= \frac{i}{8}(|\alpha|^2 - |\beta|^2 - i\rho^2)\omega \quad \text{et} \quad F_B^{(0,2)} = \frac{\bar{\alpha}\beta}{4}. \end{aligned}$$

Si comme dans l'nonc L est triviale, on a une solution manifestement invariante par κ_S et κ_A de ces équations :

$$((\alpha, \beta), B) = ((\rho, 0), d).$$

On démontre (cf. [Ta1]) que pour ρ assez grand, c'est l'unique solution modulo l'action de \mathcal{G} . Or deux solutions c -réelles \mathcal{G} -équivalentes sont nécessairement $r\mathcal{G}$ -équivalentes, ce qui finit de démontrer le théorème. \square

Nous parasitons le difficile thorme de Taubes pour dmontrer :

Théorème 4 *Soit (X, ω, J, c) une varit symplectique compacte relle, vrifiant $b_+ > 1$ et L un fibr en droite c -rel sur X . Si $SW(\mathfrak{s}_0 \otimes \mathcal{L}, c) \neq 0$, et $\mathcal{L} \neq 0$, alors il existe une courbe J -holomorphe relle (a priori singulière et non connexe) representant le fibr \mathcal{L} .*

Démonstration . Les arguments de Taubes dvelopps dans [Ta1] s'appliquent entirement notre situation. Il faut simplement traduire gomtriquement le fait qu'on a des solutions relles.

Si l'invariant de Seiberg-Witten réel $SW(\mathfrak{s}, c)$ est non nul, alors pour toute perturbation définie comme ci-dessus, c'est à dire pour toute suite ρ_n tendant vers l'infini, il existe une solution réelle aux équations $((\alpha_n, \beta_n), B_n)$. Taubes montre d'une part que la courbure F_{B_n} converge au sens des courants vers une courbe J -holomorphe C a priori singulire et non connexe. D'autre part il montre

que le lieu des zéros de α_n tend au sens de Hausdorff vers C . Les α_n tant des sections du fibré \mathcal{L} , C est Poincaré dual de \mathcal{L} .

On sait de plus que le spineur (α_n, β_n) est invariant par $\kappa_S = \kappa_\Omega \otimes \kappa_{\mathcal{L}}$. En particulier $\kappa_{\mathcal{L}}\alpha_n = \alpha_n$, ce qui implique que pour tout n , le lieu des zéros de α_n est invariant par c . La limite au sens de Hausdorff, en l'occurrence C , l'est aussi, et le théorème est démontré. \square

Corollaire 1 *Soit (X, ω, J, c) une variété symplectique compacte réelle, vérifiant $b_+ > 1$. Alors le fibré canonique est représenté par une courbe réelle.*

Références

- [Mo] J.W. MORGAN, *The Seiberg-Witten equations and applications to the topology of smooth four-manifolds*, Mathematical notes, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1996.
- [Ni] L.I. NICOLAESCU, *Notes on Seiberg-Witten theory*, Graduate Studies in Math. vol. 28, AMS, Providence, 2000.
- [Ta1] C. TAUBES, *SW \Rightarrow GW : from the Seiberg-Witten invariant and symplectic forms*, J. Amer. Math. Soc. 9 (1996), p. 845-919.
- [Ta2] C. TAUBES, *SW = GW : Counting curves and connections*, J. Diff. Geom. 52 (1999), p. 453-609.
- [We] J-Y. WELSCHINGER *Invariants of real symplectic 4-manifolds and lower bounds in real enumerative geometry*, arXiv : mathAG/0303145 v1, 12 Mar 2003.
- [Wi] E. WITTEN *Monopoles and 4-manifolds*, Math. Res. Lett. 1 (1994), p. 769-796.

D. GAYET : MATHMATIQUE, BÂTIMENT 425, UNIVERSITÉ DE PARIS SUD, 91405 ORSAY CEDEX FRANCE.

E-mail : damien.gayet@math.u-psud.fr