Opuscule mathématique

Sur les trajectoires des géodésiques et des horocycles

Françoise Dal'Bo

Table des matières

Introduction

Chapitre I

Géométrie à distance finie et infinie des groupes fuchsiens. p.1-22

1- Généralités sur la géométrie hyperbolique plane. 2- Domaines de Dirichlet et points paraboliques. 3- Points limites des groupes fuchsiens. 4- Finitude géométrique Commentaires

Chapitre II

Etude d'exemples. p.23-46

1- Groupes de Schottky. 2- Le groupe modulaire et deux de ses sous-groupes. 3- Points limites de PSL(2,$\mathbb{Z}$) et codage en fractions continues. Commentaires

Chapitre III

Dynamique topologique du flot géodésique. p.47-62

1- Définition du flot géodésique. 2- Lecture à l'infini des semi-orbites de $g_{\mathbb{R}}$. 3- Orbites périodiques de $g_{\mathbb{R}}$ et périodes. 4- Orbites denses. Commentaires

Chapitre IV

Groupes de Schottky et dynamique symbolique. p.63-72

1- Suites bilatères. 2- Densité des éléments périodiques. 3- Existence d'orbites denses. 4- Existence de compacts minimaux non périodiques. Commentaires

Chapitre V

Dynamique topologique du flot horocyclique. p.73-84

1- Dualité entre l'action linéaire de Γ et celle de $h_{\mathbb{R}}$. 2- Lecture à l'infini des orbites denses de $h_{\mathbb{R}}$. 3- Finitude géométrique et dynamique de $h_{\mathbb{R}}$. Commentaires

Chapitre VI

Actions linéaires des groupes lorentziens. p.85-92

1- Actions sur $\mathcal{H}_{-1}^{+}$ et sur le cône de lumière projectif. 2- Actions sur $\mathcal{H}_{0}^{\pm}$ et $\mathcal{H}_1$. Commentaires

Chapitre VII

Excursions des géodésiques dans les cuspides
et approximations diophantiennes. p.93-104

1- Géométrisation du théorème A. 2- Hauteurs et constantes de Hurwitz. 3- Démonstrations géométriques des théorèmes B et C. Commentaires

Références.

Introduction

Il est question dans ce texte de la dynamique topologique des flots géodésique et horocyclique. La littérature sur ce thème est riche, alors pourquoi avoir choisi de rédiger cet opuscule?

Au fil des exposés et tout particulièrement des cours donnés dans le cadre de l'école d'été de géométrie de l'université de Savoie, nous avons constaté que ce sujet, en lien avec différents domaines des mathématiques, suscitait un vif intérêt et qu'il existait peu de textes de synthèse destinés aux néophytes. Nous avons donc décidé d'en écrire un.

Nous avons tenu à ce que notre texte soit relativement court, ce qui nous a amenés à faire des choix draconiens. C'est ainsi qu'un lecteur peu familier avec la géométrie hyperbolique trouvera sans doute notre introduction un peu laconique. Nous pallions à ce point en orientant un tel lecteur vers le livre de S. Katok ([K]) et en rédigeant le premier chapitre dans l'esprit de ce livre afin d'en assurer la liaison. Un autre choix a été de privilégier les surfaces hyperboliques sur les variétés riemanniennes de courbure sectionnelle majorée par une constante strictement négative. Il nous a semblé que ce contexte géométrique relativement simple nous permettrait plus facilement de mettre en valeur les idées primitives présentes dans le cas général. Les démonstrations que nous proposons sont parfois empruntées à la littérature, notre souci a été de les simplifier dans la mesure du possible.

Notre démarche consiste à relier la dynamique des flots géodésique et horocyclique sur le fibré unitaire tangent d'une surface à celle de son groupe fondamental sur le plan hyperbolique. L'orbite d'un point par ce groupe s'accumule sur le bord à l'infini de ce plan, formant une constellation de points sur l'horizon. La topologie d'une trajectoire se lit au travers de propriétés du point de la constellation vers lequel elle se dirige. C'est ce point de vue, de lecture à l'infini, que nous adoptons.

Pour favoriser le passage de la connaissance ou savoir, nous traitons des exemples. Nous privilégions notamment la surface modulaire pour son lien avec l'arithmétique et les quotients par les groupes de Schottky pour l'approche symbolique qu'ils permettent et les exemples instructifs de surfaces d'aire infinie, géométriquement finies, qu'ils représentent.

Au delà des cas d'école que sont les flots géodésique et horocyclique parmi les systèmes dynamiques, nous montrons qu'ils sont reliés à certaines actions linéaires et à la théorie des approximations diophantiennes.

A la fin de chaque chapitre nous proposons des commentaires en pensant au lecteur qui, après un premier pas dans ce vaste monde, souhaiterait en faire d'autres.

Rennes, janvier 2004

Françoise Dal'Bo
dalbo@univ-rennes1.fr
IRMAR
Campus de Beaulieu
35042 Rennes Cedex France

Chapitre I

Géométrie à distance finie et infinie des groupes fuchsiens.

Nous donnons ici un bagage minimal au lecteur sur la géométrie hyperbolique plane pour aborder les chapitres suivants. Nous n'hésitons pas, uniquement dans ce chapitre, à énoncer des résultats et à faire référence au livre de S. Katok "Fuchsian groups" ([K]) ou de A. Beardon "The geometry of discrete groups" ([Be]) pour les démonstrations.

1 Généralités sur la géométrie hyperbolique plane.

Considérons le demi-plan de Poincaré $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C}/Im z > 0\}$ muni de la métrique hyperbolique g qui à z appartenant à $\mathbb{H}$ et à $\vec{u}$, $\vec{v}$ appartenant au plan tangent, $T_z\mathbb{H}$, de z, associe :

$$g_z(\vec{u},\vec{v}) = \frac{1}{(Imz)^2} < \vec{u},\vec{v} >$$

où $< , >$ est le produit scalaire standard sur $\mathbb{R}^2$.

La longueur hyperbolique d'une courbe différentiable par morceaux $c : [a,b] \to \mathbb{H}$ est donnée par :

$$long(c) = \int_a^b \sqrt{g_{c(t)}(\frac{dc}{ds}(t),\frac{dc}{ds}(t))}dt$$

La distance hyperbolique d sur $\mathbb{H}$ est définie par $d(z,z') = \underset{c}{Inf}\, long(c)$, où c est une courbe différentiable par morceaux dont les extrémités sont z et z'. Si $z \neq z'$, cet infimum est atteint par une unique courbe qui, si $Rez = Rez'$, est le segment de droite entre z et z' et sinon, est l'arc de cercle entre z et z' porté par l'unique demi-cercle passant par z et z' centré en un réel ([K] corollary 1.2.2.).

Les **géodésiques** de $\mathbb{H}$ sont donc les demi-droites verticales et les demi-cercles centrés en un réel.

La distance d est donnée par l'expression suivante ([K] theorem 1.2.6) :

$$(*) \quad d(z,z') = Ln\frac{|z-\bar{z}'|+|z-z'|}{|z-\bar{z}'|-|z-z'|}$$

En particulier, $d(it,it') = |Ln\frac{t}{t'}|$.

Le groupe G des homographies réelles dont le déterminant est égal à 1, agit sur $\mathbb{H}$ et donc également sur le fibré tangent de $\mathbb{H}$ noté $T\mathbb{H}$. Soit u appartenant à $T\mathbb{H}$, notons $u(0)$ son point de base et $\vec{u}$ le vecteur du plan tangent $T_{u(0)}\mathbb{H}$ associé à u. L'action d'une homographie $h(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, avec $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ et $ad-bc=1$, sur $T\mathbb{H}$ est donnée par :

$$h(u)(0) = \frac{au(0)+b}{cu(0)+d} \quad \text{et} \quad T_{u(0)}h(\vec{u}) = \frac{\vec{u}}{(cu(0)+d)^2}$$

On déduit de cette expression que G agit par isométrie sur $\mathbb{H}$ en préservant l'orientation. Plus précisement on a le résultat suivant :

Proposition 1.1 *([K] Theorem 1.3)*

Le groupe G est le groupe des isométries positives de $\mathbb{H}$.

Le groupe G est isomorphe à $PSL(2,\mathbb{R}) = \pm Id \backslash SL(2,\mathbb{R})$. Dans la suite de ce texte nous identifierons ces deux groupes et nous confondrons l'homographie $\frac{az+b}{cz+d}$ avec la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ (modulo $\pm Id$).

Introduisons les trois sous-groupes de G suivants :

$$\begin{aligned} K &= \pm\left\{\begin{pmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{pmatrix} /\theta \in \mathbb{R}\right\}, \; A = \pm\left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} /a > 0\right\}, \\ N &= \pm\left\{\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} /b \in \mathbb{R}\right\}. \end{aligned}$$

Le groupe K correspond au stabilisateur de i dans G, le groupe A correspond au groupe des homothéties $h_\lambda(z) = \lambda z$ avec $\lambda > 0$ et N, au groupe des translations $t_b(z) = z + b$.

Soient u,v appartenant au fibré unitaire tangent $T^1\mathbb{H}$. Supposons $u(0) = i$ et $v(0) = x + iy$. Posons $\gamma = t_x \circ h_y$. On a $\gamma(i) = v(0)$. Notons 2θ la mesure de l'angle $(T_i\gamma(u),v)$. Soit r l'homographie définie par : $r(z) = \frac{cos\theta z - sin\theta}{sin\theta z + cos\theta}$. On a : $\gamma \circ r(u) = v$, donc G agit transitivement sur $T^1\mathbb{H}$. Par ailleurs si $g(u) = u$ alors $g(z) = \frac{cos\alpha z - sin\alpha}{sin\alpha z + cos\alpha}$. La différentielle de g en i est la rotation vectorielle d'angle -2α et $T_ig(\vec{u}) = \vec{u}$ donc $g = Id$. Ceci montre que G agit simplement transitivement sur $T^1\mathbb{H}$ et que $G = NAK$.
Dans la suite nous utiliserons également une autre décomposition de G : KAK. Pour obtenir une telle décomposition, commençons par remarquer que le cercle hyperbolique $\mathcal{C}(i,r)$ centré en i de rayon r, est le cercle euclidien de diamètre $[ie^r,ie^{-r}]$. Considérons r tel que $\mathcal{C}(i,r)$ contienne $v(0)$. Le point $h_{e^r}(i)$ appartient à ce cercle donc il existe k dans K tel que $kh_{e^r}(i) = v(0)$. Soit g dans G tel que $v = g(u)$. L'isométrie $g^{-1}kh_{e^r}$ fixe i donc il existe k' dans K vérifiant : $g = kh_{e^r}k'$.

En résumé, nous venons de démontrer les propriétés suivantes.

Propriétés 1.2

(i) Le groupe G agit simplement transitivement sur $T^1\mathbb{H}$.

(ii) $G = NAK$.

(iii) $G = KAK$.

Soient u appartenant à $T^1\mathbb{H}$, notons $(u(t))_{t\in\mathbb{R}}$ le paramétrage par longueur d'arcs d'origine $u(0)$ de la géodésique orientée associée à u. Si $u(0) = i$ et si $\vec{u}$ est le vecteur unitaire vertical dirigé dans le sens des ordonnées croissantes, on a $u(t) = ie^t$. En utilisant l'expression (*) on montre que pour tout v dans $T^1\mathbb{H}$, la fonction $d(u(t),v(t))e^{-|t|}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. Soit v' dans $T^1\mathbb{H}$, on définit $f_{v,v'}(t)$ par : $f_{v,v'}(t) = d(v(t),v'(t))e^{-|t|}$. Pour tout h dans G, on a $f_{(h(v),h(v'))} = f_{(v,v')}$ donc il existe v'' dans $T^1\mathbb{H}$ tel que $f_{v,v'} = f_{u,v''}$. Ceci montre que $f_{v,v'}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. On définit l'application $D : T^1\mathbb{H} \times T^1\mathbb{H} \to \mathbb{R}^+$ par :

$$D(v,v') = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|} d(v(t),v'(t))dt.$$

L'application D est une distance invariante par G sur $T^1\mathbb{H}$.

Compactifions $\mathbb{H}$. Pour cela introduisons l'ensemble $\mathbb{H}(\infty) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ et munissons $\mathbb{H} \cup \mathbb{H}(\infty)$ de la topologie qui en restriction à $\mathbb{H} \cup \mathbb{R}$, est la topologie induite par celle de $\mathbb{R}^2$, et pour laquelle un voisinage du point ∞ est la réunion de ce point et du complémentaire d'un compact de $\mathbb{H} \cup \mathbb{R}$. L'ensemble $\bar{\mathbb{H}} = \mathbb{H} \cup \mathbb{H}(\infty)$ équipé de cette topologie est compact. Soit A inclus dans $\mathbb{H} \cup \mathbb{H}(\infty)$, on note $\overset{\circ}{A}$, son intérieur et $\bar{A}$ son adhérence. Le groupe G agit par homéomorphismes sur $\mathbb{H}(\infty)$ de la façon suivante : soient $g(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ et x dans $\mathbb{R}$ on a : - si $c = 0$, $\ g(\infty) = \infty$ et $g(x) = \frac{ax+b}{d}$ - si $c \neq 0$, $\ g(\infty) = \frac{a}{c}$, $\ g(-\frac{d}{c}) = \infty$ et si $x \neq -\frac{d}{c}$, $\ g(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$. PSL(2,$\mathbb{R}$) sur la droite projective $\mathbb{RP}^1$ par l'homéomorphisme de $\mathbb{H}(\infty)$ sur $\mathbb{RP}^1$ qui à x dans $\mathbb{R}$ associe $\mathbb{R}^* \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$ et à ∞ associe $\mathbb{R}^* \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Soient x^- et x^+ deux points différents de $\mathbb{H}(\infty)$, on note (x^-x^+) le demi-cercle centré en $\frac{x^-+x^+}{2}$ et orienté de x^- vers x^+, si x^- et x^+ sont réels, et la demi-droite verticale passant par le réel x^- (ou x^+) orientée de x^- vers x^+, si l'un des deux points est le point ∞. Soit z dans $\mathbb{H}$, on note $[z,x^+)$ le rayon géodésique issu de z d'extrémité x^+.

Lemme 1.3 *([B] 7.20). Soit* $\theta \in [0,\frac{\pi}{2}[$*, posons* $\varepsilon = Argch(\frac{1}{Cos\theta})$*. Le* ε*-voisinage de* $(0\ \infty)$ *est l'ensemble des* z *dans* $\mathbb{H}$ *tels que* $|argz - \frac{\pi}{2}| \leq \theta$*.*

En utilisant ce lemme et le fait que l'action de G sur les couples de points différents de $\mathbb{H}(\infty)$ est transitive, on obtient que le ε-voisinage de $(x^- x^+)$ est de la forme suivante :

Soient $z = a + ib$, $z' = a' + ib'$ deux points de $\mathbb{H}$ et x un point de $\mathbb{H}(\infty)$. Notons $(r(t))_{t\geq 0}$ le paramétrage par longueur d'arcs du rayon $[z,x)$ et $F_{x,z,z'}(t)$ la fonction $d(z,r(t)) - d(z',r(t))$. En utilisant l'expression (*), on montre que $\underset{t\to+\infty}{lim} F_{\infty,i,z'}(t) = Ln\ b'$. L'action de G sur $\mathbb{H}(\infty) \times \mathbb{H}$ étant transitive, on obtient que $F_{x,z,z'}(t)$ admet une limite quand t tend vers $+\infty$. On pose $B_x(z,z') = \underset{t\to+\infty}{lim} F_{x,z,z'}(t)$. Cette quantité est appelée **cocycle de Busemann centre en** x **calculé en z, z'**. Les propriétés suivantes résultent directement de la définition.

Propriétés 1.4

(i) *Soit* g *dans* G *:* $B_{g(x)}(g(z),g(z')) = B_x(z,z')$*.*

(ii) *Soit* z'' *dans* $\mathbb{H}$ *:* $B_x(z,z') = B_x(z,z'') + B_x(z'',z')$*.*

(iii) $-d(z,z') \leq B_x(z,z') \leq d(z,z')$*.*

(iv) $B_x(z,z') = d(z,z')$ *(resp.* $-d(z,z')$ *si et seulement si* z' *appartient au rayon* $[z,x)$ *(resp.* $z \in [z',x)$*).*

Soit $t > 0$, posons :

$$H_t(x) = \{z \in \mathbb{H}/B_x(i,z) = Ln\ t\} \text{ et } H_t^+(x) = \{z \in \mathbb{H}/B_x(i,z) \geq Ln\ t\}.$$

Si $x = \infty$, $H_t(\infty)$ est la droite horizontale définie par : $Im\ z = t$ et $H_t^+(\infty)$ est le demi-plan supérieur bordé par cette droite. Sinon, il existe g dans G et

$t' > 0$ tels que : $H_t(x) = g(H_{t'}(\infty))$, donc $H_t(x)$ est un cercle tangent à $\mathbb{R}$ en x et $H_t^+(x)$ est le disque délimité par ce cercle. Les ensembles $H_t(x)$ (resp. $H_t^+(x)$) sont appelés **horocycles** (resp. **horodisques**).

Considérons à présent le disque ouvert unité $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}/|z| < 1\}$ et l'application ψ de $\mathbb{H}$ dans $\mathbb{D}$ définie par :

$$\begin{aligned} \psi \ : \ \mathbb{H} &\longrightarrow \mathbb{D} \\ z \ &\longmapsto i\frac{z-i}{z+i} \end{aligned}$$

Cette application est un difféomorphisme, notons encore g la métrique riemanienne sur $\mathbb{D}$ obtenue par transport par ψ de la métrique hyperbolique sur $\mathbb{H}$. Soient z dans $\mathbb{D}$ et $\vec{u},\vec{v}$ appartenant au plan tangent, $T_z\mathbb{D}$, en z, la métrique g est donnée par :

$$g_z(\vec{u},\vec{v}) = \left(\frac{2}{1-|z|^2}\right)^2 < \vec{u},\vec{v} >$$

Nous conservons les mêmes notations que celles de $\mathbb{H}$. Ainsi d représente la distance induite par g sur $\mathbb{D}$ et G représente le groupe des isométries positives. Le conjugué du groupe $PSL(2,\mathbb{R})$ par ψ^{-1} est le groupe : $PSU(1,1) = \{\pm Id\} \backslash \{\begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} / a,b \in \mathbb{C}, |a|^2 - |b|^2 = 1\}$. Une isométrie directe de $\mathbb{D}$ est donc de la forme $\frac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}}$ avec $|a|^2 - |b|^2 = 1$. Dans ce modèle du disque de Poincaré, la compactification de $\mathbb{D}$ correspond à l'adjonction du cercle unité $\mathbb{D}(\infty) =$

$\{z \in \mathbb{C}/|z| = 1\}$, les géodésiques sont les demi-cercles orthogonaux à $\mathbb{D}(\infty)$ et les horocycles sont les cercles de $\mathbb{D}$ tangents à $\mathbb{D}(\infty)$. La distance d est donnée par les expressions suivantes :

Propriétés 1.5 *([Be] §7.2) Soient z et z' dans $\mathbb{D}$.*

(i) $d(0,z) = Ln\frac{1+|z|}{1-|z|}$.

(ii) $sh^2\frac{d(z,z')}{2} = \frac{|z-z'|^2}{(1+|z|^2)(1-|z'|^2)}$.

Selon les situations nous privilégierons le modèle du disque ou du demi-plan.

Classifions à présent les isométries directes. L'ensemble X désigne $\mathbb{H}$ ou $\mathbb{D}$, et $X(\infty)$ son bord. On pose $\bar{X} = X \cup X(\infty)$. Soit g dans G, notons $|trg|$ la valeur absolue (ou le module) de la trace de la matrice (modulo $\pm Id$) associée à g. Par un simple calcul, on montre que le nombre de points fixes de g sur $\bar{X}$ dépend du signe de $|trg| - 2$.

Propriété 1.6 *Soit g dans $G - \{Id\}$*

(i) Si $|trg| > 2$ alors g fixe exactement deux points de $\bar{X}$ et ces points appartiennent à $X(\infty)$.

(ii) Si $|trg| < 2$ alors g fixe exactement un point de $\bar{X}$ et ce point appartient à X.

(iii) Si $|trg| = 2$ alors g fixe exactement un point de $\bar{X}$ et ce point appartient à $X(\infty)$.

Dans le premier cas, on dit que g est **hyperbolique**. Une telle isométrie fixe la géodésique dont les extremités sont les points fixes de g. Cette géodésique est appelée **axe de** g. L'action de g sur son axe est par translation. Soit z appartenant à cet axe, les suites $(g^n(z))_{n\geq 1}$ et $(g^{-n}(z))_{n\leq 1}$ convergent chacune vers les extrémités de l'axe de g. On appelle point fixe **attractif** de g (resp. **répulsif**) la limite de $(g^n(z))_{n\geq 1}$ (resp. $(g^{-n}(z))_{n\geq 1}$). On note g^+ (resp. g^-) ce point. Dans le modèle du demi-plan, g est conjugué à une homothétie $h(z) = \lambda z$ avec $\lambda > 0$, $\lambda \neq 1$.

Dans le deuxième cas, g est dit **elliptique**. Enfin dans le cas (iii), g est dit **parabolique**. Dans le modèle du demi-plan, g est conjugué à une translation $t(z) = z + b$ donc g préserve les horocycles basés en son point fixe et agit par translation dessus.

A chaque isométrie g de G on associe la quantité :

$$\ell(g) = \underset{x \in X}{Inf}\, d(x,g(x))$$

Plaçons-nous dans le modèle du demi-plan et considérons une homothétie $h(z) = \lambda z$, $\lambda > 0$, $\lambda \neq 1$. En utilisant la formule (*), on obtient : $\ell(h) = |Ln\ \lambda|$ et $d(z,h(z)) = \ell(h)$ si et seulement si $Rez = 0$. Soit g une isométrie hyperbolique, g est conjuguée à une homothétie, sa matrice M modulo $\{\pm Id\}$ est donc diagonalisable. Notons λ_g la valeur propre de M de valeur absolue (ou module) supérieur à 1. On déduit du raisonnement précédent sur les homothéties, le lemme suivant :

Lemme 1.7 *Soit g une isométrie hyperbolique de G.*

(i) $\ell(g) = 2Ln\ |\lambda_g|$

(ii) $d(z,g(z)) = \ell(g)$ *si et seulement si z appartient à l'axe de g.*

Si g est elliptique, $\ell(g)$ est nul et est atteint par un point de $\mathbb{H}$. Si g est parabolique, g est conjugué à une translation et $t(z) = z + b$, donc $\ell(g) = \underset{z \in \mathbb{H}}{Inf}\, d(z,z+b)$. Comme $d(z,z+b)$ est inférieur à $\frac{|b|}{Imz}$, on obtient : $\ell(g) = 0$.

Contrairement au cas elliptique, $\ell(g)$ n'est pas atteint. Soient g dans G et x dans X, notons $g'(x)$ la dérivée de g en x. Lorsque $X = \mathbb{D}$, cette quantité s'étend naturellement à $X(\infty) = \mathbb{D}(\infty)$ et on a la **relation de conformité** suivante :

$$(**) \forall z_1, z_2 \in \overline{\mathbb{D}}, \ \ |g(z_1) - g(z_2)| = |g'(z_1)|^{1/2} |g'(z_2)|^{1/2} |z_1 - z_2|$$

Plaçons nous à présent dans le modèle du demi-plan. Soit $g(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ un élément de G. Si $c \neq 0$, la dérivée de g est définie sur $\overline{\mathbb{H}} - \{\infty, \frac{-d}{c}\}$ par $g'(z) = \frac{1}{cz+d)^2}$. Si $c = 0$ on a : $g'(z) = \frac{a}{d}$ pour tout z dans $\overline{\mathbb{H}} - \{\infty\}$. La relation de conformité (**) est encore vérifiée là où la dérivée est définie. La propriété suivante résulte d'un simple calcul.

Propriété 1.8 *Soit g un élément hyperbolique de G. On a $|g'(g^{\pm})| = e^{\mp \ell(g)}$, sauf si $X = \mathbb{H}$ et $g(\infty) = \infty$.*

On déduit de cette propriété et du lemme 1.7 qu'une isométrie hyperbolique de X est déterminée par son action sur $X(\infty)$.

Plaçons-nous dans le modèle du disque. Soit g dans $\overline{\mathbb{D}}$ ne fixant pas 0. Posons $g(z) = \frac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}}$ avec $|a|^2 - |b|^2 = 1$ et $b \neq 0$. Introduisons le demi-cercle : $C(g^{-1}) = \{z \in \overline{\mathbb{D}} / |g'(z)| = 1\}$. Ce demi-cercle est centré en $-\frac{\bar{a}}{\bar{b}}$ et son rayon euclidien est $\frac{1}{|b|}$. On note $D(g^{-1})$ le demi-disque fermé de $\overline{\mathbb{D}}$ borné par $C(g^{-1})$ et on pose Ext $D(g^{-1}) = \overline{\overline{\mathbb{D}} - D(g^{-1})}$. D'après la relation de conformité (**), pour tous z_1, z_2, dans $C(g^{-1})$ on a : $|g(z_1) - g(z_2)| = |z_1 - z_2|$. Autrement dit, g agit par isométrie euclidienne sur $C(g^{-1})$. Par un simple calcul, on obtient les propriétés suivantes :

Propriété 1.9 *Soit g une isométrie positive de $\mathbb{D}$ ne fixant pas 0.*

(i) Le demi-cercle $C(g^{-1})$ est une géodésique.

(ii) Le demi-disque $D(g^{-1})$ est l'ensemble des z de $\overline{\mathbb{D}}$ tels que $|g'(z)| \geq 1$.

(iii) $g(D(g^{-1})) =$ Ext $D(g)$.

(iv) $D(g)$ et $D(g^{-1})$ sont disjoints si et seulement si g est hyperbolique.

(v) $D(g)$ et $D(g^{-1})$ sont tangents si et seulement si g est parabolique et le point de tangence est le point fixe de g.

(vi) $D(g)$ *et* $D(g^{-1})$ *sont sécants si et seulement si* g *est elliptique et le point d'intersection est le point fixe de* g*.*

Remarquons que si g est hyperbolique, comme $|g'(g^{\pm})| = e^{\mp\ell(g)}$, le point attractif (resp. répulsif) de g appartient à $\overset{\circ}{D}(g)$ (resp. $D(g^{-1})$).

Lemme 1.9 ([K]) *Soit* g *dans* G *ne fixant pas 0. Un point* z *de* $\overline{\mathbb{D}}$ *appartient à* $C(g^{-1})$ *si et seulement si* $|g(z)| = |z|$*.*

On déduit de ce lemme et des propriétés 1.5, le corollaire suivant :

Corollaire 1.10 *Soit* g *une isométrie positive de* $\mathbb{D}$ *ne fixant pas 0. La géodésique* $C(g)$ *est la médiatrice du segment géodésique* $[0,g(0)]$.

2 Domaines de Dirichlet d'un groupe fuchsien et points paraboliques.

On s'intéresse ici aux sous-groupes Γ de G agissant proprement discontinûment sur X ce qui signifie que pour tout compact K de X, seul un nombre fini d'éléments γ de Γ vérifient : $\gamma K \cap K \neq \phi$. Un tel groupe est appelé **groupe fuchsien**

Proposition 2.1 *([K] Theorem 2.2.6) Un sous-groupe de* G *est fuchsien si et seulement s'il est discret dans* G*.*

Soit Γ un groupe fuchsien. Un ensemble F inclus dans X est un **domaine**

fondamental associé à Γ s'il vérifie les trois propriétés suivantes :

(i) F est un fermé convexe d'intérieur non vide.

(ii) $\underset{\gamma\in\Gamma}{\cup}\gamma F = X$.

(iii) $\overset{\circ}{F}\cap\gamma(\overset{\circ}{F}) = \phi$ pour tout $\gamma\in\Gamma-\{Id\}$

Une méthode classique pour obtenir de tels domaines est d'associer à un point z_0 de X qui n'est fixé par aucun élément de $\Gamma-\{Id\}$, l'intersection des ensembles :

$$X_{z_0}(\gamma) = \{z\in X/d(z,z_0)\leq d(z,\gamma(z_0))\}.$$

Le bord de $X_{z_0}(\gamma)$ est la médiatrice du segment géodésique $[z_0,\gamma(z_0)]$. Cette médiatrice est l'unique géodésique passant par le milieu de $[z_0,\gamma(z_0)]$ et orthogonale à $[z_0,\gamma(z_0)]$ ([K] Lemme 3.2.1). Posons $D_{z_0}(\Gamma) = \underset{\substack{\gamma\in\Gamma\\ \gamma\neq Id}}{\cap} X_{z_0}(\gamma)$. Cet ensemble est appelé **domaine de Dirichlet de Γ centré en** z_0. Si $X=\mathbb{D}$ et $z_0=0$, d'après le corollaire 1.10, on a : $D_0(\Gamma) = ((\underset{\gamma\in\Gamma}{\cap} D(\gamma))\cap\mathbb{D})$.

Théorème 2.2 *([K] theorem 3.2.2) Soient Γ un groupe fuchsien agissant sur X et z_0 un point de X vérifiant : $\gamma(z_0)\neq z_0$ pour tout $\gamma\in\Gamma-\{Id\}$. Le domaine de Dirichlet $D_{z_0}(\Gamma)$ est un domaine fondamental convexe de Γ.*

Remarquons que pour tout g dans G, on a : $g(D_z(\Gamma)) = D_{g(z)}(g\Gamma g^{-1})$. Un domaine fondamental F associé à Γ est **localement fini** si pour tout compact K inclus dans X, seul un nombre fini d'éléments γ de Γ vérifie : $\gamma F\cap K\neq\phi$.

Propriete 2.3 *Un domaine de Dirichlet est localement fini.*

Démonstration Considérons un domaine de Dirichlet $D_z(\Gamma)$. Supposons qu'il existe un compact K de X et un sous-ensemble Γ' infini de Γ tel que pour tout γ dans Γ' : $\gamma(D_z(\Gamma)\cap K\neq\phi$. Présentons Γ' sous la forme d'une suite $(\gamma_n)_{n\geq 1}$ de Γ. Pour tout $n\geq 1$, il existe $z_n\in D_z(\Gamma)$ tel que $\gamma_n(z_n)$ appartienne à K. Comme z_n appartient à $D_z(\Gamma)$ on a : $d(z_n,z)\leq d(\gamma_n(z_n),z)$. On déduit de cette inégalité que la suite $(\gamma_n(z))_{n\geq 1}$ est bornée. Le groupe Γ étant fuchsien, l'ensemble $\{\gamma_n/n\geq 1\}$ est nécessairement fini, ce qui contredit l'hypothèse de départ. $\square$ On associe à un groupe fuchsien Γ la surface $S=\Gamma\setminus X$. Soit θ l'application de $\Gamma\setminus D_{z_0}(\Gamma)$ dans S définie par : $\theta(\Gamma z'\cap D_{z_0}(\Gamma)) = \Gamma z'$.

Lemme 2.4 *([B] théorème 9-2-4). L'application θ est un homéomorphisme.*

Notre but est à présent d'analyser la nature des points de l'ensemble $\overline{D_z(\Gamma)}\cap X(\infty)$ noté : $D_z(\Gamma)(\infty)$. Pour cela introduisons l'ensemble $L_p(\Gamma)$ des points de $X(\infty)$ fixés par les éléments paraboliques de Γ. Ces points seront appelés **points paraboliques**. Le lemme suivant porte sur le stabilisateur dans Γ des points fixes des éléments de Γ.

Lemme 2.5 *Soit x dans $\overline{\mathbb{H}}$, le stabilisateur, Γ_x, de x dans Γ est cyclique*

Démonstration Quitte à conjuguer Γ, on peut supposer que x appartient à $\{i,\infty\}$. Dans le premier cas, Γ_i, est un sous-groupe discret du groupe compact K introduit dans le §-1, il est donc fini et cyclique. Dans le deuxième cas, Γ_∞ est un sous-groupe du groupe $\{s(z) = az + b/a > 0,\, b \in \mathbb{R}\}$. Puisque Γ_∞ est discret il est nécessairement cyclique. $\square$

Soit $g(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, avec $ad-bc = 1$ et $c \geq 0$. On pose $c(g) = c$. Remarquons que $c(g) = 0$ si et seulement si $g(\infty) = \infty$.

Propriétés 2.6 *Soient Γ un groupe fuchsien agissant sur $\mathbb{H}$ contenant une translation non triviale et t un générateur de Γ_∞. Les propriétés suivantes sont satisfaites :*

(i) Soit $(\gamma_n)_{n\geq 1}$ une suite de Γ, si $(c(\gamma_n))_{n\geq 1}$ est borné alors il existe $N > 0$,ℓ_n,q_n dans $\mathbb{Z}$ et γ dans Γ tels que : $\gamma_n = t^{\ell_n}\gamma t^{q_n}$ pour tout $n \geq N$.

(ii) Il existe $A > 0$, tel que $c(\gamma) \geq A$, pour tout γ dans $\Gamma - \Gamma\infty$.

Démonstration Posons $t(z) = z + \alpha$. On peut supposer $\alpha > 0$.

(i) Supposons qu'il existe une suite $(\gamma_n)_{n\geq 1}$ de $\Gamma - \Gamma_\infty$ telle que $(c(\gamma_n))_{n\geq 1}$ soit bornée. Ecrivons γ_n sous la forme $\gamma_n(z) = \frac{a_n z+b_n}{c_n z+d_n}$ avec $a_n d_n - b_n c_n = 1$ et $c_n > 0$. Considérons la partie entière, e_n, de $\frac{a_n}{\alpha c_n}$ et celle, e'_n, de $\frac{d_n}{\alpha c_n}$. Posons $g_n = t^{-e'_n}\gamma_n t^{-e_n}$, on a $g_n(z) = \frac{(a_n - c_n e_n \alpha)z + b'_n}{c_n z + (-c_n e'_n \alpha + d_n)}$. Tous les coefficients de g_n sont bornés car c_n est borné et on a les inégalités : $0 < a_n - c_n e_n \alpha < c_n\alpha$, $0 < d_n - c_n e'_n \alpha < c_n \alpha$. Le groupe Γ étant discret, il existe $N \geq 0$ et γ dans Γ tels que $g_n = \gamma$ pour tout $n \geq N$.

(ii) Supposons qu'il existe une suite $(\gamma_n)_{n\geq 1}$ de $\Gamma - \Gamma_\infty$ telle que $\underset{n\to+\infty}{lim} c(\gamma_n) = 0$. D'après (i), à partir d'un certain rang, γ_n est de la forme $t^{\ell_n}\gamma t^{q_n}$, ce qui est contradictoire car $c(t^{\ell_n}\gamma t^{q_n}) = c(\gamma)$ et $c(\gamma_n) > 0$. $\square$

Interprétons géométriquement $c(g)$. Soit $t > 0$, considérons l'horodisque $H_t^+(\infty) = \{z \in \mathbb{H}/B_\infty(i,z) \geq Ln\ t\}$. Cet ensemble est le demi-plan fermé $Imz \geq t$. Son image par $g(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ avec $c(g) \neq 0$, est le disque passant par $g(it)$ tangent à l'axe réel en $\frac{a}{c} = g(\infty)$. Notons δ son diamètre en euclidien. On a : $B_{g(\infty)}(it + \frac{a}{c}, \frac{a}{c} + i\delta) = Ln\frac{\delta}{t}$ donc $B_\infty(g^{-1}(it + \frac{a}{c}), g^{-1}(\frac{a}{c} + i\delta)) = Ln\frac{\delta}{t}$.

Par ailleurs $\frac{a}{c} + i\delta$ appartient à $g(H_t(\infty))$ et $\frac{a}{c} + it$ appartient à $H_t(\infty)$, donc $B_\infty(g^{-1}(it + \frac{a}{c}), g^{-1}(\frac{a}{c} + i\delta)) = B_\infty(g^{-1}(it + \frac{a}{c}), \frac{a}{c} + it)$. Ainsi $Ln\frac{t}{\delta} = Ln\frac{t}{Img^{-1}(\frac{a}{c}+it)}$, ce qui entraine l'égalité : $\delta = \frac{1}{c^2(g)t}$.

On vient donc de démontrer le lemme suivant :

Lemme 2.7 *Soit g une isométrie positive agissant sur $\mathbb{H}$ ne fixant pas ∞ Pour tout $s > 0$, le diamètre euclidien de l'horodisque $g(H_s^+(\infty))$ est $\frac{1}{c^2(g)s}$.*

On déduit de ce lemme et des propriétés 2.6, le corollaire suivant :

Corollaire 2.8 *Soient Γ un groupe fuchsien contenant des isométries parabolique et x un point de $L_p(\Gamma)$. Il existe $s > 0$ tel que $\gamma H_s^+(x) \cap H_s^+(x) = \phi$ pour tout γ appartenant à $\Gamma - \Gamma_x$.*

Soit Γ un groupe fuchsien contenant des isométries paraboliques et x un point de $L_p(\Gamma)$. Considérons un horodisque $H^+(x)$ vérifiant : $\gamma H^+(x) \cap H^+(x) = \phi$ pour tout γ dans $\Gamma - \Gamma_x$. On appelle **cuspide associée à** x, l'image de la projection q de $\Gamma_x \setminus H^+(x)$ dans $S = \Gamma \setminus \mathbb{H}$. On note $C(H^+(x))$ ou $C(x)$ cet ensemble. Remarquons que q est injective. En effet si $q(\Gamma_x(y)) = q(\Gamma_x(y'))$, il existe γ dans Γ tel que $y' = \gamma(y)$, donc $H^+(x) \cap \gamma H^+(x) \neq \phi$. Par conséquent, γ appartient à Γ_x et $\Gamma_x(y) = \Gamma_x(y')$. Etablissons un lien entre les points paraboliques de Γ et le bord à l'infini d'un domaine de Dirichlet, de Γ. Pour cela, commençons par caractériser les points de ce bord à l'aide de la fonction de Busemann.

Proposition 2.9 *Un point x de $X(\infty)$ appartient à $D_z(\Gamma)(\infty)$ si et seulement si $\underset{\gamma \in \Gamma}{Sup}\, B_x(z, \gamma(z)) = 0$*

Démonstration Soit $r : [0, +\infty) \to X$, le paramétrage par longueur d'arc du rayon géodésique $[z,x)$. Supposons : $\underset{\gamma\in\Gamma}{Sup}\, B_x(z,\gamma(z)) = 0$. A chaque γ dans Γ, on associe la fonction f de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{H}$ définie par $f(t) = t - d(\gamma(z),r(t))$. Cette fonction est croissante, car si $s > t$, on a : $d(\gamma(z),r(s)) \leq d(\gamma(z),r(t)) + s - t$. Par ailleurs $\underset{t\to+\infty}{lim} f(t) = B_x(z,\gamma(z))$ et $B_x(z,\gamma(z))$ est négatif donc $f(t) \leq 0$ pour tout t. Ceci montre que $[z,x)$ est inclus dans $D_z(\Gamma)$ et donc que x appartient à $D_z(\Gamma)(\infty)$. Réciproquement, supposons que x soit limite d'une suite de points $(z_n)_{n\geq 1}$ de $D_z(\Gamma)$. Comme $D_z(\Gamma)$ est convexe, on peut supposer que la suite $(z_n)_{n\geq 1}$ appartient au rayon $[z,x)$. Le point z_n appartient à $D_z(\Gamma)$, donc pour tout γ dans Γ on a : $d(z,z_n) - d(\gamma(z),z_n) \leq 0$. Par passage à la limite,on obtient : $B_x(z,\gamma(z)) \leq 0$ pour tout γ dans Γ et donc : $\underset{\gamma\in\Gamma}{Sup}\, B_x(z,\gamma(z)) = 0$. □

Corollaire 2.10 *Si x appartient à $L_p(\Gamma)$, il existe γ dans Γ tel que $\gamma(x)$ appartienne à $D_z(\Gamma)(\infty)$.*

Démonstration Plaçons-nous dans le demi-plan. Quitte à conjuguer Γ on peut supposer $x = \infty$. Soit $(\gamma_n)_{n\geq 1}$ une suite de Γ telle que $\underset{n\to+\infty}{lim} B_\infty(z,\gamma_n(z)) = \underset{\gamma\in\Gamma}{Sup}\, B_\infty(z,\gamma(z))$. Considérons une translation $t(z) = z + \alpha$ engendrant Γ_∞. Pour tout n, il existe k_n dans $\mathbb{Z}$ tel que la partie réelle de $g_n(z) = t^{k_n}\gamma_n(z)$ appartienne à l'intervalle $[0,\alpha]$. Si $\underset{n\to+\infty}{lim} Img_n(z) = +\infty$, alors $\underset{n\to+\infty}{lim} c(g_n) = 0$. D'après la propriété 2.6 (i), on a : $g_n = t^{\ell_n}\gamma t^{q_n}$ ce qui contredit l'hypothèse sur $Img_n(z)$. Par conséquent il existe $A > 0$ tel que $1 \leq Img_n(z) \leq A$ pour tout n. La suite $(g_n(z))_{n\geq 1}$ est donc bornée. Le groupe Γ étant fuchsien, l'ensemble $\{g_n/n \geq 1\}$ est fini. Soit $(n_p)_{p\geq 1}$ tel que $g_{n_p} = g$ pour tout $p \geq 1$. On a $B_\infty(z,\gamma_{n_p}(z)) = B_\infty(z,t^{-k_{n_p}}g(z))$ or $B_\infty(z,t^{-k_{n_p}}g(z)) = B_\infty(z,g(z))$ donc $\underset{\gamma\in\Gamma}{Sup}\, B_\infty(z,\gamma(z)) = B_\infty(z,g(z))$. On déduit de cette égalité que $\underset{\gamma\in\Gamma}{Sup}\, B_\infty(g(z),\gamma(z))$ est nul et donc que x appartient à $D_{g(z)}(\Gamma)(\infty)$. Or $g(D_z(\Gamma)) = D_{g(z)}(\Gamma)$, donc $g^{-1}(x)$ appartient à $D_z(\Gamma)(\infty)$. □ Dans le paragraphe suivant, on verra qu'en général $D_z(\Gamma)(\infty)$ ne contient pas uniquement des points paraboliques.

3 Points limites des groupes fuchsiens.

Soit Γ un groupe fuchsien, on appelle **ensemble limite de** Γ, le fermé $L(\Gamma) = \overline{\Gamma_z} \cap X(\infty)$ où z est un point de X. En utilisant la propriété 1.5 (ii), on montre que cet ensemble est indépendant de z. Remarquons que $L(\Gamma)$ est invariant par Γ et qu'il contient les points fixes des isométries non elliptiques de Γ. En particulier l'ensemble $L_p(\Gamma)$ est inclus dans $L(\Gamma)$. Dans le chapitre suivant (proposition II-1.5) nous démontrerons que si Γ est résoluble (i.e la suite définie par $\Gamma_1 = [\Gamma,\Gamma], \Gamma_{n+1} = [\Gamma_n,\Gamma_n]$ est stationnaire), alors Γ fixe un point de $\bar{X}$ ou laisse invariante une géodésique et sinon, Γ contient une infinité d'isométries hyperboliques n'ayant aucun point fixe en commun. On peut donc lire le caractère résoluble de Γ sur son ensemble limite de la façon suivante :

Propriété 3.1 *Un groupe fuchsien est résoluble si et seulement si le cardinal de son ensemble limite est fini. De plus, si ce cardinal est fini, il est inférieur ou égal à 2.*

Un groupe fuchsien résoluble est dit **élémentaire**.

Proposition 3.2 *Si Γ est un groupe fuchsien qui n'est pas élémentaire alors $L(\Gamma)$ est le plus petit (au sens de l'inclusion) fermé non vide de $X(\infty)$ invariant par Γ.* /

Démonstration Soit F un fermé non vide invariant par Γ inclus dans $L(\Gamma)$. Puisque Γ n'est pas élémentaire, il contient une infinité d'isométries hyperboliques $(\gamma_n)_{n\geq 1}$ n'ayant aucun point fixe en commun. Le fermé F étant invariant par chaque γ_n, nécessairement γ_n^+ et γ_n^- appartiennent à F et donc F n'est pas fini. Fixons deux tels points γ_N^+,γ_N^- dans F et choisissons un point z sur la géodésique $(\gamma_N^-\gamma_N^+)$. Soient x un point de $L(\Gamma)$ et $(g_n)_{n\geq 1}$ une suite de Γ tels que $\underset{n\to+\infty}{lim}\, g_n(z) = x$. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que les suites $(g_n(\gamma_N^-))_{n\geq 1}$ et $(g_n(\gamma_N^+))_{n\geq 1}$ convergent vers des points f^- et f^+ de F. Puisque $g_n(z)$ appartient à la géodésique $(g_n(\gamma_N^-)g_n(\gamma_N^+))$ nécessairement x appartient à $\{f^-,f^+\}$. Ceci montre que $L(\Gamma)$ est inclus dans F et donc que $F = L(\Gamma)$. $\square$

Dans le paragraphe précédent nous avons montré que le bord d'un domaine de Dirichlet, $D_z(\Gamma)(\infty)$, rencontre toutes les orbites sous Γ des points de $L_p(\Gamma)$. Cette propriété est encore valable pour les points de $X(\infty) - L(\Gamma)$.

Lemme 3.3 *Si x appartient à $X(\infty) - L(\Gamma)$, alors il existe g dans Γ tel que $g(x)$ appartient à $D_z(\Gamma)(\infty)$.*

Démontration Il suffit de montrer qu'il existe g dans Γ tel que $\underset{\gamma\in\Gamma}{Sup}\, B_{g(x)}(z,\gamma(z)) = 0$. Ceci revient à montrer que la quantité $S = \underset{\gamma\in\Gamma}{Sup}\, B_x(z,\gamma(z))$ est égale à $B_x(z,g^{-1}(z))$. Puisque x n'appartient pas à $L(\Gamma)$, la quantité S est finie. Supposons qu'il existe $(\gamma_n)_{n\geq 1}$ dans Γ telle que la suite $(B_x(z,\gamma_n(z))_{n\geq 1}$ ne soit pas stationnaire et converge vers S. Pour n grand, $\gamma_n(z)$ appartient à l'horodisque $H^+_{e^{S-1}}(x)$. L'intersection de cet horodisque avec $X(\infty)$ est x donc la suite $(\gamma_n(z))_{n\geq 1}$ converge vers x, ce qui est impossible car x n'appartient pas à $L(\Gamma)$. $\square$

Plaçons-nous dans le demi-plan de Poincaré $\mathbb{H}$, on définit **l'aire hyperbolique** d'un sous-ensemble $B \subset \mathbb{H}$ par : $\mathcal{A}(B) = \int\int_B \frac{dxdy}{y^2}$, quand cette intégrale existe. Si $T_{\alpha,\beta,\gamma}$ est un triangle hyperbolique d'angle α,β,γ son aire est donnée par ([K] theorem 1.4.2) :

$$\mathcal{A}(T_{\alpha,\beta,\gamma}) = \pi - \alpha - \beta - \gamma$$

On dit qu'un groupe fuchsien Γ est un **réseau** si l'aire d'un de ses domaines de Dirichlet est finie. Si ce domaine est compact, le réseau est dit **uniforme**.

Corollaire 3.4 *L'ensemble limite d'un réseau est égal à $X(\infty)$.*

Démonstration Soient Γ un réseau et $D_z(\Gamma)$ un domaine de Dirichlet de Γ d'aire finie. Supposons que $X(\infty) - L(\Gamma)$ ne soit pas vide, d'après le lemme précédent, l'intersection de cet ensemble avec $D_z(\Gamma)(\infty)$ est infinie. Considérons une infinité de points $(x_n)_{n\geq 1}$ appartenant à cette intersection. Chaque x_n est limite d'une suite de $D_z(\Gamma)$. Or cet ensemble est convexe donc le rayon $[z,x_n)$ est inclus dans $D_z(\Gamma)$. Soit T_n le triangle hyperbolique de sommets z,x_n,x_{n+1}. Quitte à renuméroter les $(x_n)_{n\geq 1}$ on peut supposer que les triangles T_n sont adjacents. Notons α_n l'angle de T_n en z. L'aire de T_n est $\mathcal{A}(T_n) = \pi - \alpha_n$. Par ailleurs les triangles T_n sont adjacents donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \leq 2\pi$. Soit $N \geq 1$, la réunion $\overset{N}{\underset{n=1}{\cup}} T_n$ est incluse dans $D_z(\Gamma)$ et $\mathcal{A}(\overset{N}{\underset{n=1}{\cup}} T_n) \geq N\pi - 2\pi$ ce qui est impossible car l'aire de $D_z(\Gamma)$ est finie. $\square$ Nous verrons des exemples explicites de réseaux dans le chapitre suivant. En particulier nous montrerons que le groupe $\Gamma(2)$ composé des isométries $\frac{az+b}{cz+d}$ de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$ avec a et d pairs et, b et c impairs, est un groupe libre à deux générateurs qui est un réseau. Considérons son groupe dérivé $[\Gamma(2),\Gamma(2)]$. Ce groupe est normal dans $\Gamma(2)$ donc son ensemble limite L est $\mathbb{H}(\infty)$. En effet, soient x dans L et $(\gamma_n)_{n\geq 1}$ une suite de $[\Gamma(2),\Gamma(2)]$ telle que $\underset{n\to+\infty}{lim} \gamma_n(z) = x$. Pour tout γ dans $\Gamma(2)$, la suite $(\gamma\gamma_n(z))_{n\geq 1}$ converge vers $\gamma(x)$. Cette suite et la suite $(\gamma\gamma_n\gamma^{-1}(z))_{n\geq 1}$ admettent la même limite donc $\gamma(x)$ appartient à L. Ceci montre que L est un fermé invariant par $\Gamma(2)$. Comme $L(\Gamma(2))$ est minimal, $L = \mathbb{H}(\infty)$. Par ailleurs $[\Gamma(2),\Gamma(2)]$ n'est pas un réseau car il est d'indice infini dans $\Gamma(2)$. Cet exemple montre qu'un groupe fuchsien dont l'ensemble limite est $X(\infty)$ n'est pas nécessairement un réseau.

Intéressons-nous à présent à la façon dont un point de $L(\Gamma)$ peut être approché par une suite de Γz. On rappelle que $L_p(\Gamma)$ est l'ensemble des points fixes des isométries paraboliques de Γ. Un tel point est donc approché par une suite de Γz restant sur un horocycle basé en ce point. En revanche, si x est un point de $L(\Gamma)$ dont tous les horodisques basés en ce point rencontrent une infinité de points de Γz, on dit que x est **horocyclique** (figure -8-). Cette définition ne dépend pas du point z choisi. Si γ est une isométrie hyperbolique de Γ ses points fixes sont horocycliques. En effet, il suffit de prendre z sur la géodésique $(\gamma^-\gamma^+)$ et de constater que l'intersection d'un horodisque basé en $\gamma^{\pm}$ rencontre une infinité de points $(\gamma^n(z))_{n\in\mathbb{Z}}$. La caractérisation suivante des points horocycliques est une conséquence directe de la définition.

Propriété 3.5 *Un point x de $L(\Gamma)$ est horocyclique si et seulement si* $\underset{\gamma\in\Gamma}{Sup}\, B_x(z,\gamma(z)) = +\infty$.

Le lemme suivant résulte de cette propriété et de la proposition 2.9.

Lemme 3.6 *Si x est un point horocyclique de $L(\Gamma)$ alors son orbite sous Γ ne rencontre pas le bord des domaines de Dirichlet.*

On déduit de ce lemme et du corollaire 2.10, le corollaire suivant :

Corollaire 3.7 *Un point horocyclique n'est pas parabolique.*

Parmi les points horocycliques x de $L(\Gamma)$ on distingue ceux qui sont **coniques**, c'est à dire pour lesquels il existe une suite de Γz restant à distance bornée du rayon géodésique $[z,x)$ (figure -8-). Cette définition ne dépend pas du point z. En effet, supposons qu'il existe $(\gamma_n)_{n\geq 1}$ dans Γ et $\varepsilon > 0$ tels que $d(\gamma_n(z),[z,x)) \leq \varepsilon$. Soit z' dans X, les rayons $[z,x)$ et $[z',x)$ étant asymptotes, pour n grand, $\gamma_n(z)$ est dans le ε-voisinage de $[z',x)$ et donc $d(\gamma_n(z'),[z',x)) \leq \varepsilon + d(z,z')$. Le point fixe d'une isométrie hyperbolique de Γ est conique.

Propriété 3.8 *Soit z dans X. Un point x de $L(\Gamma)$ est conique si et seulement s'il existe une suite $(\gamma_n)_{n\geq 1}$ de Γ vérifiant :* $\lim\limits_{n\to+\infty} B_x(z,\gamma_n(z)) = +\infty$ *et* $(d(z,\gamma_n(z)) - B_x(z,\gamma_n(z)))_{n\geq 1}$ *est borné.*

Démonstration Il suffit de démontrer cette propriété pour $z = i$ et $x = \infty$. Soit $z' = a + ib$ dans $\mathbb{H}$. On a $B_\infty(i,z') = Lnb$. Posons $t = \frac{a^2}{b^2}$. En utilisant la relation (*) du paragraphe 1 on obtient : $d(i,z') - B_\infty(i,z') = Ln\frac{1}{2}(t + \frac{1}{b^2} + \sqrt{(t+1)^2 + 2t + (1-\frac{1}{b^2})^2})$. D'après le lemme 1.3, une suite de points $(z_n = a_n + ib_n)_{n\geq 1}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = +\infty$ appartient à un ε-voisinage de $[i,\infty)$ si et seulement s'il existe $k \geq 0$ tel que $\frac{a_n^2}{b_n^2} \leq k$ pour tout n. Donc $(z_n)_{n\geq 1}$ appartient à un ε-voisinage de $[i,\infty)$ si et seulement si la suite $(d(i,z_n) - B_\infty(i,z_n))_{n\geq 1}$ est bornée. □

On note $L_h(\Gamma)$ (resp. $L_c(\Gamma)$) l'ensemble des points horocycliques (resp. coniques) de Γ. On a donc les relations suivantes :

$$L_h(\Gamma) \cap L_p(\Gamma) = \phi \text{ et } L_c(\Gamma) \subset L_h(\Gamma).$$

4 Finitude géométrique.

Fixons un groupe fuchsien Γ et un domaine de Dirichlet $D_z(\Gamma)$. Analysons la frontière $D_z(\Gamma) - \overset{\circ}{D}_z(\Gamma) \subset X$ de ce domaine. Soit z' un point de cette frontière, il existe une suite $(z_n)_{n\geq 1}$ de X convergeant vers z' et une suite $(\gamma_n)_{n\geq 1}$ de Γ telles que : $d(z,z_n) > d(z,\gamma_n(z_n))$. La suite $(\gamma_n^{-1}(z))_{n\geq 1}$ est bornée et Γ est discret donc quitte à extraire une sous-suite, $\gamma_n = \gamma$ à partir d'un certain rang et $d(z',z') \geq d(z,\gamma(z'))$. Par ailleurs z' appartient à $D_z(\Gamma)$, donc z' est sur la médiatrice M_γ de $[z,\gamma(z)]$. Ceci montre que la frontière de $D_z(\Gamma)$ est incluse dans $\underset{\gamma\in\Gamma}{\cup} M_\gamma$. Remarquons que si $X = \mathbb{D}$ et $z = 0$, la médiatrice M_γ est le demi-cercle C_γ introduit dans le paragraphe 1 (corollaire 1.10). On appelle **côté** de $D_z(\Gamma)$, l'intersection, quand elle n'est pas vide, ni réduite à un point, de $D_z(\Gamma)$ avec une de ses images $\gamma D_z(\Gamma)$. Puisque $D_z(\Gamma)$ est un domaine fondamental, cette intersection est incluse dans la frontière de $D_z(\Gamma)$ et est un segment, une géodésique ou un rayon géodésique inclus dans M_γ. On la note S_γ Remarquons que si S_γ est un côté, $S_{\gamma^{-1}}$ en est aussi un et que : $S_{\gamma^{-1}} = \gamma^{-1}(S_\gamma)$. On note D_γ le demi-disque (ou demi-plan) fermé de $X \cup X(\infty)$ contenant $\gamma(z)$ bordé par S_γ. On a : $\gamma^{-1}(D_\gamma) = ExtD_{\gamma^{-1}}$.

Introduisons l'ensemble $\widetilde{\Omega}(\Gamma)$ des points de X appartenant aux géodésiques dont les extrémités sont dans $L(\Gamma)$. Cet ensemble est un fermé, invariant par Γ. Si Γ est un réseau alors $\widetilde{\Omega}(\Gamma) = X$. Si Γ est élémentaire d'après la propriété 3.1 ou bien $\widetilde{\Omega}(\Gamma)$ est vide, ou bien $\widetilde{\Omega}(\Gamma)$ est une géodésique. On appelle **région de Nielsen** de Γ l'enveloppe convexe de $\widetilde{\Omega}(\Gamma)$, on la note $N(\Gamma)$. Si $L(\Gamma) = X(\infty)$ alors $\widetilde{\Omega}(\Gamma) = X$.

Définition 4.1 *On dit que Γ est géométriquement fini s'il existe un domaine* *de Dirichlet $D_z(\Gamma)$ dont l'intersection avec la région de Nielsen de Γ est d'aire finie.*

Un réseau est géométriquement fini, un groupe élémentaire aussi. Plaçons-nous dans le disque de Poincaré, supposons que Γ ne soit pas élémentaire et que $D_z(\Gamma)$ ait un nombre fini de côtés $S_1,\cdots,S_n$, numérotés dans le sens trigonométrique. Notons x_i^-,x_i^+ les extrémités du côté S_i orientées de x_i^- vers x_i^+ dans le sens trigonométrique. Si tous les côtés consécutifs ont un sommet en commun, $D_z(\Gamma)$ est la réunion de n triangles de sommets $(z,x_i^-,x_i^+)_{1\leq i\leq n}$ et donc l'aire de $D_z(\Gamma)$ est finie, autrement dit Γ est un réseau. Sinon, considérons les couples $(x_i^+,x_{i+1}^-)_{1\leq i\leq n}$ avec par convention : $x_{n+1}^+ = x_1^-$. Notons L_i la géodésique d'extrémités ces deux points si $x_i^+ \neq x_{i+1}^-$ et l'ensemble vide sinon. Puisque pour tout γ dans $\Gamma - \{Id\}$, le point $\gamma(z)$ n'appartient pas à $D_z(\Gamma)$, si $x_i^+ \neq x_{i+1}^-$, l'ensemble $L(\Gamma)$ ne rencontre pas l'arc de cercle ouvert $\widehat{x_i^+x_{i+1}^-}$. L'intersection de $\widetilde{\Omega}(\Gamma)$ avec $D_z(\Gamma)$ est donc inclus dans le polygone bordé par $S_1,L_1,S_2,\cdots S_n,L_n$, qui à son tour est d'aire finie. En conclusion, si $D_z(\Gamma)$ a un nombre fini de côté alors l'aire de $D_z(\Gamma)\cap N(\Gamma)$ est finie. La réciproque est également vraie et est démontrée dans [Be] (Theorem 10-1-2) (la partie (2) $\Rightarrow$ (1) de ce théorème est démontrée uniquement sous l'hypothèse qu'il existe un z tel que l'aire de $D_z(\Gamma)\cap N(\Gamma)$ soit finie). Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante :

Proposition 4.2 *((i) $\Rightarrow$ (ii) [Be] Theorem 10-1-2). Soit Γ un groupe fuchsien non élémentaire. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) L'aire de $D_z(\Gamma)\cap N(\Gamma)$ est finie.

(ii) Le domaine de Dirichlet $D_z(\Gamma)$ a un nombre fini de côtés.

On déduit de cette proposition que si Γ est géométriquement fini alors $D_z(\Gamma)(\infty)\cap L(\Gamma)$ est fini. Cette remarque, ajoutée au corollaire 2.10 permet de démontrer le corollaire suivant.

Corollaire 4.3 *Soit Γ un groupe fuchsien non élémentaire géométriquement fini, ou bien $L_p(\Gamma)$ est vide, ou bien l'action de Γ sur $L_p(\Gamma)$ admet un nombre fini d'orbites.*

Notons $P_z(\Gamma)$ l'ensemble des points paraboliques de $D_z(\Gamma)(\infty)$. D'après le corollaire 2.8 , pour chaque x dans $P_z(\Gamma)$, il existe un horodisque $H^+(x)$ basé en x tel que : $H^+(x)\cap\gamma H^+(x) = \phi$ pour tout γ dans $\Gamma-\Gamma_x$. L'ensemble $P_z(\Gamma)$ étant dénombrable, on peut choisir les horodisques $(H^+(x))_{x\in P_z(\Gamma)}$ deux à deux disjoints.

Proposition 4.5 *Soit Γ un groupe fuchsien non élémentaire, les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) L'aire de $D_z(\Gamma)\cap N(\Gamma)$ est finie.

(ii) Le domaine $E_z = D_z(\Gamma) \cap N(\Gamma) - \bigcup_{x \in P_z(\Gamma)} H^+(x) \cap D_z(\Gamma) \cap N(\Gamma)$.

est relativement compact dans X.

Démonstration Plaçons-nous dans le modèle du disque. $(i) \Rightarrow (ii)$. D'après la proposition 4.2, le domaine $D_z(\Gamma)$ a un nombre fini de côtés. Si les extrémités de ces côtés appartiennent à $\mathbb{D}$ alors $D_z(\Gamma)$ est compact et donc $\overline{E_z}$ l'est aussi. Sinon, il existe x appartenant à $\mathbb{D}(\infty)$, extrémité d'un côté de $D_z(\Gamma)$. Montrons que si x appartient à $L(\Gamma)$ alors x est parabolique. Soit γ dans Γ tel que x soit l'extrémité de $S_{\gamma^{-1}}$ et tel que $D_{\gamma^{-1}}$ contienne une suite non stationnaire $(x_n)_{n\geq 1}$ de $L(\Gamma)$ convergeant vers x. Le point x appartient à $\overline{D_z(\Gamma)} \cap \gamma_1^{-1}(\overline{D_z(\Gamma)})$ donc $\gamma_1(x)$ appartient à $S_{\gamma_1} = \overline{D_z(\Gamma)} \cap \gamma_1(\overline{D_z(\Gamma)})$. Par ailleurs $\gamma_1(x_n)$ appartient à Ext $D(\gamma_1^{-1})$ donc il existe $\gamma_2^{-1} \neq \gamma_1$, tel que $\gamma_1(x)$ soit point de tangence entre S_{γ_1} et $S_{\gamma_2^{-1}}$. Supposons que x ne soit pas parabolique, dans ce cas γ_1^{-1} et γ_2^{-1} sont différents. En remplaçant dans le raisonnement précédent x par $\gamma_1(x)$ et γ_1 par γ_2, on obtient un élément γ_3 dans $\Gamma - \{\gamma_2^{\pm 1}, Id\}$ tel que $\gamma_2\gamma_1(x)$ appartienne à $D_{\gamma_2} \cap D_{\gamma_3^{-1}}$. De proche en proche, on construit une suite $(\gamma_n)_{n\geq 1}$ de $\Gamma - \{Id\}$ vérifiant : $\gamma_n \cdots \gamma_1(x) \in D_z(\Gamma)(\infty) \cap L(\Gamma)$ et $\gamma_{n+1} \neq \gamma_n^{\pm 1}$. Puisque $D_z(\Gamma)$ a un nombre fini de côtés, l'ensemble des points de cette suite est fini. Il existe donc deux entiers $m > n$ tels que $\gamma_m \cdots \gamma_1(x) = \gamma_n \cdots \gamma_1(x)$. Le point x n'étant ni parabolique, ni horocyclique (lemme 3.6) nécessairement $\gamma_m \cdots \gamma_{n+1} = Id$. Analysons l'orbite de z. Le point $\gamma_{n+1}(z)$ appartient à $\mathring{D}(\gamma_{n+1})$, les demi-disques $D(\gamma_{n+1})$ et $D(\gamma_{n+2})$ sont tangents donc $\gamma_{n+2}\ \gamma_{n+1}(z)$ appartient à $D(\gamma_{n+2})$. En réitérant ce raisonnement, on obtient que le point $\gamma_m \cdots \gamma_{n+1}(z)$ appartient à $\mathring{D}(\gamma_m)$, ce qui contredit l'égalité $\gamma_m \cdots \gamma_{n+1}(z) = z$. En conclusion, x est parabolique. Supposons à présent que $\overline{E_z}$ ne soit pas compact et considérons y dans $\overline{E_z} \cap \mathbb{D}(\infty)$. Un tel point n'appartient pas à $L(\Gamma)$. En effet, sinon y est l'extrémité d'un côté de $D_z(\Gamma)$ donc, d'après le raisonnement précédent, y est parabolique. Soit p un générateur de Γ_y, le domaine $D_z(\Gamma)$ est inclus dans $D_p \cup D_{p-1}$. L'ensemble E_z est donc inclus dans l'ensemble noté A, extérieur de $(D_p \cup D_{p-1}) \cap H^+(y)$, ce qui est impossible car $\bar{A} \cap \mathbb{D}(\infty)$ ne contient pas y. Puisque y n'appartient pas à $L(\Gamma)$, il existe un arc ouvert $\widehat{M_1M_2}$ inclus dans $\mathbb{D}(\infty)$ contenant y tel que $\widehat{M_1M_2} \cap L(\Gamma) = \phi$. Considérons le domaine convexe fermé $\mathcal{E}$ contenant $\widehat{M_1M_2}$ et borné par la géodésique d'extrémités M_1 et M_2. L'ensemble $\mathbb{D} - \mathcal{E}$ est convexe et contient $\Omega(\Gamma)$ donc $N(\Gamma) \cap \mathcal{E} = \phi$, ce qui contredit le fait que y appartienne à $\overline{E_z}$. En conclusion $\overline{E_z}$ est compact dans $\mathbb{D}$. $(ii) \Rightarrow (i)$ Supposons que $\overline{E_z}$ soit un compact de $\mathbb{D}$ et que Γ ne soit pas géométriquement fini. D'après la proposition 4.2, il existe une suite de côtés $(S_{\gamma_n})_{n\geq 1}$ de $D_z(\Gamma)$ dont les rayons euclidiens convergent vers 0. Pour tout $n \geq 1$, le point $\gamma_n(z)$ appartient à D_{γ_n} donc quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que les demi-cercles $(S_{\gamma_n})_{n\geq 1}$ convergent vers un point x de $D_z(\Gamma)(\infty) \cap L(\Gamma)$. Un tel point est parabolique car $\overline{E_z}$ est compact. Soit p un générateur de Γ_x. Le domaine $D_z(\Gamma)$ est inclus dans l'extérieur de $D_p \cup D_{p^{-1}}$ et x n'appartient pas à $\overset{\circ}{D}_{\gamma_n}$ donc pour n grand, S_{γ_n} est inclus dans $D_p \cup D_{p^{-1}}$. Ceci est impossible car S_{γ_n} est un côté. $\square$ Il résulte de la démonstration précédente $(ii) \Rightarrow (i)$ que si Γ n'est pas géométriquement fini alors $L(\Gamma) \cap D_z(\Gamma)(\infty)$ contient un point non parabolique. Un tel point ne peut pas être horocyclique d'après le lemme 3.6. Par conséquent, si $L(\Gamma) = L_h(\Gamma) \cup L_p(\Gamma)$ alors Γ est géométriquement fini. Supposons à présent que Γ soit géométriquement fini et non élémentaire. Considérons un domaine de Dirichlet $D_z(\Gamma)$ tel que $\overline{E_z}$ soit un compact de $\mathbb{D}$. Soient y dans $L(\Gamma) - L_p(\Gamma)$ et z' dans $\mathbb{D}$ tels que $[z',y)$ soit inclus dans $N(\Gamma)$. Puisque $D_z(\Gamma)$ est un domaine fondamental, $[z',y)$ est inclus dans la réunion $\bigcup_{\gamma\in\Gamma} \gamma(D_z(\Gamma)) \cap [z',y)$. Supposons qu'il existe z'' dans $[z',y)$ tel que $[z'',y)$ soit inclus dans $\bigcup_{\substack{\gamma\in\Gamma \\ x\in P_z(\Gamma)}} \gamma(H^+(x))$. Puisque $P_z(\Gamma)$ est fini, on peut choisir les $(H^+(x))_{x\in P_z(\Gamma)}$ de sorte que les horodisques $(\gamma(H^+(x)))_{\gamma\in\Gamma, x\in P_z(\Gamma)}$ soient confondus ou disjoints. Le rayon $[z'',y)$ est donc inclus dans un tel horodisque, ce qui est impossible car y n'est pas parabolique. On déduit de ce raisonnement qu'il existe une suite $(z_n)_{n\geq 1}$ de $[z',y)$ convergeant vers y et $(\gamma_n)_{n\geq 1}$ dans Γ tels que z_n appartienne à $\gamma_n(\overline{E_z})$. L'ensemble $\overline{E_z}$ étant compact, la suite $(\gamma_n(z'))_{n\geq 1}$ converge donc vers y en restant dans un ε-voisinage de $[z',y)$. Ceci montre que y est conique. Nous sommes donc en mesure de donner une caractérisation de la finitude géométrique en termes d'approches des points de $L(\Gamma)$.

Proposition 4.6 *Soit Γ un groupe fuchsien non élémentaire, les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Le groupe Γ est géométriquement fini.*

(ii) $L(\Gamma) = L_p(\Gamma) \cup L_h(\Gamma)$.

(iii) $L(\Gamma) = L_p(\Gamma) \cup L_c(\Gamma)$.

Commentaires

Les notions introduites dans ce chapitre et les principaux résultats se généralisent au cas où X est une variété riemannienne simplement connexe, convexe, complète, dont la courbure sectionnelle est inférieure à $-a^2 < 0$ ([B-G-S], [E]). Nous appelerons une telle variété : **variété de Hadamard**. Le cocycle de Busemann est bien défini et permet de construire une distance sur le bord géométrique de $X([B0])$. En général, le groupe G des isométries directes de X n'opère pas transitivement sur X et peut même être trivial. Les groupes fuchsiens correpondent aux sous-groupes de G agissant proprement discontinument sur X. Dans ce cadre, la notion de finitude géométrique a bien un sens mais est plus délicate ($[Bow]$). Nous n'avons pas abordé ici l'aspect métrique des ensembles limites comme par exemple, le calcul des dimensions de Hausdorff et la théorie des mesures de Patterson-Sullivan. Une référence sur ce sujet est le livre de Nicholls ([N]).

Chapitre II

Etude d'exemples.

Dans ce chapitre nous étudions deux cas particuliers de groupes fuchsiens et illustrons les notions introduites dans le chapitre I.

1 Groupes de Schottky

Soit g un élément de $PSU(1,1)$ ne fixant pas 0. On rappelle [cf. I-1] que l'ensemble $D(g)$ est un demi-disque fermé de $\bar{\mathbb{D}}$ orthogonal à $\mathbb{D}(\infty)$ et que $g(D(g^{-1})) = Ext\ D(g)$, avec $Ext\ D(g) = \overline{\bar{\mathbb{D}} - D(g)}$. Les demi-disques $D(g)$ et $D(g^{-1})$ ont même rayon euclidien. Si g est hyperbolique, ces deux ensembles sont disjoints. Sinon, ils se rencontrent uniquement au point fixe de g.

Définition 1.1 *Soit p un entier ≥ 2. Un groupe de Schottky de $PSU(1,1)$ de rang p est un groupe engendré par p iométries paraboliques ou hyperboliques $g_1,...,g_p$ de $PSU(1,1)$ vérifiant :*

$$(D(g_i) \cup D(g_i^{-1})) \cap (D(g_j) \cup D(g_j^{-1})) = \phi$$

pour tout $i \neq j$ dans $\{1,...,p\}$.
Un groupe de Schottky de $PSL(2,\mathbb{R})$ de rang p est le conjugué par ψ d'un groupe de Schottky de rang p de $PSU(1,1)$.

Nous notons un tel groupe $S(g_1,...,g_p)$.
Dans la suite, afin de ne pas alourdir les notations, nous nous restreignons au cas où $p = 2$.

Fixons un groupe de Schottky de rang 2 : $S(g_1,g_2)$. Posons $\mathcal{A} = \{g_1^{\pm 1},g_2^{\pm 1}\}$ et $\mathcal{D}(S(g_1,g_2)) = (\bigcup_{\substack{i=1,2\\ \epsilon=\pm 1}} Ext(D(g_i^{\epsilon}))) \cap \mathbb{D}$.
L'intérieur de $\mathcal{D}(S(g_1,g_2))$ contient 0.

On appelle **mot réduit** de $S(g_1,g_2)$, un produit de n lettres $s_1...s_n$ de $\mathcal{A}$ vérifiant : $s_i \neq s_{i+1}^{-1}$ pour tout $1 \leq i \leq n$.
Le lemme suivant précise, en fonction du mot réduit, la position de l'image d'un point par un tel mot.

Lemme 1.2 *Pour tout mot réduit $s_1...s_n$ on a : $s_1...s_n(Ext\ D(s_n^{-1})) \subset D(s_1)$.*

Démonstration.

Raisonnons par récurrence sur $n \geq 1$. Si $n = 1$, le lemme est une conséquence de la propriété suivante :

$$\forall s \in \mathcal{A} \qquad s(ExtD(s^{-1})) = D(s).$$

Supposons que l'inclusion soit démontrée jusqu'au rang $N \geq 1$. Considérons un mot réduit $s_1...s_N s_{N+1}$. On a, par hypothèse de récurrence, $s_2...s_{N+1}(Ext\ D(s_{N+1}^{-1})) \subset D(s_2)$. Comme $s_2 \neq s_1^{-1}$, l'ensemble $D(s_2)$ est inclus dans $Ext\ D(s_1^{-1})$. Par ailleurs $s_1(Ext\ D(s_1^{-1})) = D(s_1)$ donc $s_1...s_{N+1}(Ext\ D(s_{N+1}^{-1})) \subset D(s_1))$. $\square$

Corollaire 1.3 *Le groupe* $S(g_1,g_2)$ *est libre, relativement à* g_1,g_2 *et discret. De plus* $\mathcal{D}(S(g_1,g_2))$ *est le domaine de Dirichlet,* $D_0(S(g_1,g_2))$*, du groupe* $S(g_1,g_2)$ *en* 0.

Démonstration.

Soit $s_1,...,s_n$ un mot réduit. D'après le lemme 1.2, le point $s_1...s_n(0)$ appartient à $D(s_1)$. Les ensembles $D(s_1)$ et $\overset{\circ}{\mathcal{D}}\,(S(g_1,g_2))$ sont disjoints donc $s_1...s_n(0) \neq 0$, ce qui montre que $S(g_1,g_2)$ est libre. Montrons à présent que $S(g_1,g_2)$ est discret. Considérons une suite $(\gamma_n)_{n\geq 1}$ de $S(g_1,g_2)-\{Id\}$. Chaque γ_n est un mot réduit $s_{n,1}...s_{n,\ell_n}$. Quitte à extraire une sous-suite $(\gamma_{n_k})_{k\geq 1}$, on peut supposer : $s_{n_k1} = s_1$ pour tout $k \geq 1$. Le point $\gamma_{n_k}(0)$ appartient à $D(s_1)$, donc qu'il existe $c > 0$ tel que $d(0,\gamma_{n_k}(0)) > c$ pour tout $k \geq 1$. Ceci montre que $(\gamma_n)_{n\geq 1}$ ne peut pas converger vers l'identité et donc que Γ est discret. Puisque $S(g_1,g_2)$ est libre et discret, aucun élément n'est elliptique et donc $D_0(S(g_1,g_2))$ est bien défini. Montrons que $\mathcal{D}(S(g_1,g_2))$ et $D_0(S(g_1,g_2))$ sont égaux. L'ensemble $D_0(S(g_1,g_2))$ est inclus dans $\mathcal{D}(S(g_1,g_2))$. Si cette inclusion est stricte, il existe z dans $\overset{\circ}{\mathcal{D}}\,(S(g_1,g_2))$ et γ dans $S(g_1,g_2) - \{Id\}$ tels que $\gamma(z)$ appartient à $\overset{\circ}{\mathcal{D}}\,(S(g_1,g_2))$. Ecrivons γ sous la forme d'un mot réduit $s_1...s_n$. D'après le lemme 1.2, le point $\gamma(z)$ appartient à $D(s_1)$, ce qui est impossible car $\gamma(z)$ appartient à $\overset{\circ}{\mathcal{D}}\,(S(g_1,g_2))$. $\square$

On déduit du lemme I.2.4 que les surfaces $S(g_1,g_2)\backslash\mathbb{H}$ obtenues dans les quatre cas décrits figure 1 sont :

Analysons la nature des isométries de $S(g_1,g_2)$ en fonction de leur écriture réduite. Considérons un mot réduit $\gamma = s_1 ... s_n$ vérifiant $s_1^{-1} \neq s_n$. Pour tout $k > 0$, le point $\gamma^k(0)$ appartient à $D(s_1)$ et $\gamma^{-k}(0)$ appartient à $D(s_n^{-1})$. Si γ est parabolique, $\lim\limits_{k\to+\infty} \gamma^k(0) = \lim\limits_{k\to+\infty} \gamma^{-k}(0)$ donc $D(s_1)$ et $D(s_n^{-1})$ sont tangents et γ fixe le point de tangence. Ceci entraîne que $s_1 = s_n$ est parabolique et a même point fixe que γ. Donc $\gamma = s_1^n$.

Nous venons de démontrer les propriétés suivantes :

Propriétés 1.4

(i) *Si g_1 et g_2 sont hyperboliques, tous les éléments de $S(g_1,g_2) - \{Id\}$ sont hyperboliques.*

(ii) *Sinon, les isométries non hyperboliques de $S(g_1,g_2) - \{Id\}$ sont toutes conjuguées aux puissances des générateurs paraboliques.*

Montrons que les groupes de Schottky sont contenus dans la plupart des sous-groupes de $PSU(1,1)$.

On rappelle que : $D(g) = \{\overline{z \in \mathbb{D} / d(g(0),z) \geq d(0,z)}\}$.

Soient h et t des isométries de $PSL(2,\mathbb{R})$ définies par : $h(z) = \lambda z$ avec $\lambda > 0$ et $t(z) = z + 1$. Pour n dans $\mathbb{Z}^*$, la médiatrice de $[h^n(i),i]$ est le demi-cercle de $\mathbb{H}$ de rayon euclidien $\lambda^{\frac{n}{2}}$, centré en 0 et celle du segment $[t^n(i),i]$ est la demi-droite de $\mathbb{H}$ passant par $\frac{n}{2}$. Dans les deux cas, les extrémités de chacune de ces médiatrices convergent, lorsque $n \to +\infty$ ou $-\infty$, vers ∞.

Ceci montre que les diamètres euclidiens de $D(\psi\ h^n\ \psi^{-1})$ et $D(\psi\ t^n\ \psi^{-1})$ tendent vers 0 et donc que pour toute isométrie hyperbolique ou parabolique g de $PSU(1,1)$, la suite des diamètres euclidiens de $(D(g^n))_{n\geq 1}$ converge vers 0. La propriété suivante est une conséquence directe de cette remarque.

Propriété 1.5 *Soient g et g' deux isométries hyperboliques ou paraboliques de G, n'ayant aucun point fixe en commun. Il existe $N > 0$ tel que pour tout $n \geq N$, les isométries g^n et g'^n engendrent un groupe de Schottky.*

Comme application de cette propriété nous démontrons un résultat connu dans le cas général sous le nom d'*alternative de Tits*.

Proposition 1.6 *Un sous-groupe Γ non résoluble de G contient un groupe de Schottky.*

Démonstration.

Plaçons-nous dans le demi-plan $\mathbb{H}$.Supposons que Γ contienne une isométrie parabolique ou hyperbolique g. Quitte à conjuger Γ on peut supposer que g fixe le point ∞. Le stabilisateur de ∞ dans G étant le groupe des similitudes $az + b$ avec $a > 0$, qui est résoluble, Γ contient nécessairement une isométrie g' ne fixant pas ∞. Pour les mêmes raisons, on peut supposer plus généralement que les points fixés par g' sont tous différents de ceux de

g. Les isométries g et $g'gg'^{-1}$ sont paraboliques ou hyperboliques et n'ont aucun point fixe en commun donc, d'après la propriété 1.5, pour n grand g^n et $g'g^n g'^{-1}$ engendrent un groupe de Schottky. Supposons à présent que Γ ne contienne que des isométries elliptiques. Raisonnons dans $PSU(1,1)$. Puisque Γ n'est pas abélien, quitte à conjuguer Γ, on peut supposer que $\psi\Gamma\psi^{-1}$ contient une isométrie elliptique g de la forme $g(z) = e^{i\theta}z$ avec $\theta \neq k\pi$ et qu'il existe g' dans $\psi\Gamma\psi^{-1}$ ne fixant pas 0. Posons $g'(z) = \frac{az+b}{bz+\bar{a}}$ avec $\mid a \mid^2 - \mid b \mid^2 = 1$ et $b \neq 0$. Soit $[g,g']$ le commutateur de g et g', on a : $tr([g,g']) = 2 + 4 \mid b^2 \mid sin\theta^2 > 2$. Donc $[g,g']$ est hyperbolique, ce qui contredit l'hypothèse faite sur Γ. $\square$

On déduit de la démonstration précédente qu'un groupe fuchsien résoluble est engendré par une isométrie.

Revenons à présent au cas d'un groupe de Schottky : $S(g_1,g_2)$ et intéressons-nous à son ensemble limite $L(S(g_1,g_2))$. Remarquons que, puisque $D_0(S(g_1,g_2))$ a un nombre fini de côtés, $S(g_1,g_2)$ est géométriquement fini. Donc, d'après la proposition I.4.6, $L(S(g_1,g_2)) = L_c(S(g_1,g_2)) \cup L_p(S(g_1,g_2))$.

Soient $n \geq 2$ et $s_1...s_n$ un mot réduit, posons $D(s_1...s_n) = s_1...s_{n-1}\ D(s_n)$ (voir figure 2). Cet ensemble est un demi-disque fermé orthogonal à $\mathbb{D}(\infty)$. Introduisons l'ensemble $\sum^+ = \{(s_i)_{i\geq 1}/s_i \in \mathcal{A}, s_{i+1} \neq s_i^{-1}\}$.

Propriétés 1.7

(i) Soit $s_1...s_n$ un mot réduit de longueur $n \geq 2$, on a :

$$D(s_1...s_n) \subset D(s_1...s_{n-1}).$$

(ii) Soient $s_1...s_n$ et $s'_1...s'_n$ deux mots réduits différents, de longueur $n \geq 2$, les demi-disques $D(s_1...s_n)$ et $D(s'_1...s'_n)$ sont tangents ou disjoints.

(iii) Soit $(s_i)_{i\geq 1}$ dans $\sum^+$, $\lim_{n\to+\infty}$ (diamètre euclidien $D(s_1...s_n)$) $= 0$.

Démonstration.

(i) Soit $s_1...s_n$ un mot réduit de longueur $n \geq 2$, comme $s_n \neq s_{n-1}^{-1}$, on a : $D(s_n) \subset Ext\ D(s_{n-1}^{-1})$ et donc $s_{n-1}\ D(s_n) \subset D(s_{n-1})$. Cette inclusion entraine (i).

(ii) Soit $k \geq 1$ le plus petit entier $\leq n$ tel que $s'_k \neq s_k$. Démontrer la propriété (ii) revient à démontrer que $D(s'_k...s'_n)$ et $D(s_k...s_n)$ sont tangents ou disjoints. Si $k = n$ cette propriété est clairement vérifiée. Sinon on a : $D(s'_k...s'_n) = s'_k...s'_{n-1}D(s'_n)$. Donc, d'après le lemme 1.2, $D(s'_k...s'_n)$ est inclus dans $D(s'_k)$. De même $D(s_k...s_n)$ est inclus dans $D(s_k)$. Comme $s_k \neq s'_k$, $D(s_k)$ et $D(s'_k)$ sont tangents ou disjoints donc $D(s'_k...s'_n)$ et $D(s_k...s_n)$ le sont aussi.

(iii) Soit a dans $\mathcal{A}$, le domaine $\overline{\mathcal{D}(S(g_1,g_2))}$ contient le demi-cercle bordant $D(a^{-1})$ donc $a(\overline{\mathcal{D}(S(g_1,g_2))}$ contient celui bordant $D(a)$. Par ailleurs, d'après le lemme 1.2, $a(\mathcal{D}(S(g_1,g_2))$ est inclus dans $D(a)$ donc ces deux ensembles ont même diamètre euclidien. En utilisant ce même raisonnement, on obtient que, plus généralement, pour tout mot réduit $s_1...s_n$, les ensembles $s_1...s_n$ $(\mathcal{D}(S(g_1,g_2))$ et $D(s_1...s_n)$ ont même diamètre euclidien. Soit $(s_i)_{i\geq 1}$ dans $\sum^+$, d'après (i), la suite de demi-disques $(D(s_1...s_n))_{n\geq 1}$ est emboîtée, de plus $\mathcal{D}(S(g_1,g_2))$ est localement fini donc : $\lim\limits_{n\to+\infty}$ diamètre euclidien $D(s_1...s_n) = 0$. $\square$

On déduit directement du lemme 1.2 et des propriétés (i) et (iii), le corollaire suivant :

Corollaire 1.8 *Soit s dans $\sum^+$, pour tout z dans $\mathcal{D}(S(g_1,g_2))$ la suite $(s_1...s_n(z))_{n\geq 1}$ converge vers un point de $L(S(g_1,g_2))$ indépendant de z.*

Le but est à présent de montrer que $\sum^+$ est un codage de $L(S(g_1,g_2))$. Pour cela introduisons l'application x de $\sum^+$ dans $L(S(g_1,g_2))$ qui à $s = (s_i)_{i\geq 1}$ associe $x(s) = \lim\limits_{n\to+\infty} s_1...s_n(0)$. Cette application est surjective. En effet, soit y dans $L(S(g_1,g_2))$ et $(\gamma_n)_{n\geq 1}$ dans $S(g_1,g_2)$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} \gamma_n(0) = y$. Ecrivons γ_n sous forme d'un mot réduit $\gamma_n = s_{n,1}...s_{n,\ell_n}$ avec $s_{n,i} \in \mathcal{A}$ et $s_{n,i} \neq s_{n,i+1}^{-1}$. Puisque $\mathcal{A}$ est fini, quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer qu'il existe $s = (s_i)_{i\geq 1} \in \sum^+$ et une suite d'entiers positifs $(\ell_n)_{n\geq 1}$ strictement croissante tels que : $\gamma_n = s_1...s_{\ell_n}$. Le point $s_{\ell_n}(0)$ appartient à $D(s_{\ell_n})$ donc $\gamma_n(0)$ appartient à $D(s_1...s_{\ell_n})$. On déduit alors de cette remarque et des propriétés 1.7, l'égalité suivante :

$$\{y\} = \bigcap_{n=1}^{+\infty} D(s_1...s_n).$$

Les demi-disques étant emboîtés, on a : $y = \lim\limits_{n\to+\infty} s_1...s_n(0)$, autrement dit $y = x(s)$. Ceci montre en particulier que $L(S(g_1,g_2))$ est inclus dans $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{+\infty} \bigcup_{\substack{\text{mots réduits}\\ \text{de longueur } n}} D(s_1...s_n)$. L'inclusion dans l'autre sens résulte des propriétés 1.7. En conclusion, on a l'égalité :

$$L(S(g_1,g_2)) = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \bigcup_{\substack{\text{mots réduits}\\ \text{de longueur } n}} D(s_1...s_n)$$

L'ensemble $L(S(g_1,g_2))$ est de type Cantor car, pour n fixé, l'ensemble

$\bigcup\limits_{\substack{\text{mots réduits}\\ \text{de longueur } n}} D(s_1...s_n)$ est une réunion de demi-disques tangents ou disjoints contenant chacun exactement 3 demi-disques tangents ou disjoints de la forme : $D(s_1...s_n a)$ avec a dans $\mathcal{A} - \{s_n^{-1}\}$ (voir figure 2).

Soient $s = (s_i)_{i\geq 1}$ et $s' = (s'_i)_{i\geq 1}$ appartenant à $\sum^+$, posons $\delta(s,s') = 0$ si $s = s'$ et $\delta(s,s') = \frac{1}{min\{i\geq 1/s_i \neq s'_i\}}$. Cette application définit une distance sur $\sum^+$. Notons T l'application de décalage sur $\sum^+$ définie par $T((s_i)_{i\geq 1}) = (s_{i+1})_{i\geq 1}$. Cette application est continue.

Propriété 1.9 *L'application $x : \sum^+ \to L(S(g_1,g_2))$ est continue.*

Démonstration.

Soit $(S^n)_{n\geq 1}$ une suite de $\sum^+$ convergeant vers un élément s de $\sum^+$. Posons $S^n = (S_i^n)_{i\geq 1}$ et $s = (s_i)_{i\geq 1}$. Pour tout $k \geq 2$, il existe $N > 1$ tel que pour tout $n \geq N$, on ait : $S_i^n = s_i$ quelque soit $1 \leq i \leq k$. Soit $n \geq N, x(S^n) = s_1...s_{k-1}x(T^{k-1}(S^n))$. Le point $T^{k-1}(S^n)$ appartient à $D(s_k)$ donc $x(S^n)$ appartient à $D(s_1...s_k)$. De même, $x(s)$ appartient à $D(s_1...s_k)$. Par conséquent, $\mid x(S^n) - x(s) \mid \leq$ diamètre euclidien de $D(s_1...s_k)$. On déduit de la propriété 1.7(iii) que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mid x(S^n) - x(s) \mid = 0$. $\square$

L'application $x : \sum^+ \to L(S(g_1,g_2))$ est-elle injective ? Pour répondre à cette question, deux cas sont à étudier selon que l'un des générateurs est parabolique ou ne l'est pas.

Introduisons l'ensemble $\sum_c^+ = \{(u_n)_{n\geq 1} \in \sum^+$ si le terme u_n est parabolique alors il existe $m > n$ tel que $u_m \neq u_n\}$.

1er cas : g_1 et g_2 sont hyperboliques

Dans ce cas $\sum_c^+ = \sum^+$ et il existe $R > 0$ tel que pour tous a dans $\mathcal{A}$ et b dans $\mathcal{A} - \{a\}$, les fermés $D(a)$ et $D(b)$ sont disjoints. Soient $s = (s_i)_{i\geq 1}$ et $s' = (s'_i)_{i\geq 1}$ appartenant à $\sum^+$. Supposons qu'il existe $i \geq 1$ tel $s_i \neq s'_i$, notons k le plus petit de ces entiers et posons $\gamma = s_1...s_{k-1}$ si $k > 1$ et $\gamma = Id$ sinon. Pour tout $n \geq k$, les points $\gamma^{-1}s_1...s_n(0)$ et $\gamma^{-1}s'_1...s'_n(0)$ appartiennent respectivement à $D(s_k)$ et $D(s'_k)$ qui sont disjoints, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} s_1...s_n(0) \neq \lim\limits_{n\to+\infty} s'_1...s'_n(0)$. Ceci montre que x est injective.

2ème cas : g_1 ou g_2 est parabolique

Supposons que g_1 soit parabolique, dans ce cas $(g_1^n(0))_{n\geq 1}$ et $(g_1^{-n}(0))_{n\geq 1}$ convergent vers le même point donc x n'est pas injective. Montrons l'égalité suivante : $x(\sum_c^+) = L_c(S(g_1,g_2))$.

Soit $s = (s_i)_{i\geq 1}$ dans $\sum^+ - \sum_c^+$. Notons k le rang à partir duquel s_k est parabolique et $s_i = s_k$ pour tout $i \geq k$. Posons $\gamma = s_1...s_{k-1}$ si $k > 1$ et $\gamma = Id$ sinon. Le point $\gamma^{-1}x(s)$ est parabolique car il est fixé par s_k, donc $x(s)$ est parabolique. Ceci montre que l'ensemble $x(\sum^+ - \sum_c^+)$ est inclus dans $L_p(S(g_1,g_2))$ et donc, puisque x est surjective, que $L_c(S(g_1,g_2))$ est inclus dans $x(\sum_c^+)$. Considérons à présent, y dans $L_p(S(g_1,g_2))$, d'après le corollaire I.2.10, il existe γ dans $S(g_1,g_2)$ tel que $\gamma(y)$ soit fixé par un générateur parabolique g. Soit $s = (s_i)_{i\geq 1}$ une suite de $\sum^+$ telle que $x(s) = y$. Puisque γ s'écrit sous la forme d'un mot réduit fini, il existe $s' = (s'_i)_{i\geq 1}$ dans $\sum^+$, $k \geq 0$ et $k' \geq 0$ tels que $\gamma(y) = x(s')$ et pour tout $i \geq 1$: $s'_{k'+i} = s_{k+i}$. Le point $\gamma(y)$ appartient à $D(s'_i)$, or $\gamma(y)$ est le point de tangence de $D(g)$ et $D(g^{-1})$ donc $s'_1 = g$ ou g^{-1}. En remplaçant dans ce raisonnement $\gamma(y)$ par $s_1^{-1}(y)$, on obtient $s'_1 = s'_2$. De proche en proche on montre que la suite s' est constante, de terme général g ou g^{-1} et donc que s est constante à partir d'un certain rang. Ceci entraine que s n'appartient pas à $\sum_c^+$. En conclusion $x^{-1}(L_p(S(g_1,g_2))) = \sum - \sum_c^+$ et donc $x(\sum_c^+) = L_c(S(g_1,g_2))$. Montrons à présent que l'application x en restriction à $\sum_c^+$ est injective. Soient $s = (s_i)_{i\geq 1}$ et $s' = (s'_i)_{i\geq 1}$ appartenant à $\sum_c^+$. Supposons que s et s' soient différents et notons k le plus petit des $i \geq 1$ tel que : $s_i \neq s'_i$. Posons $\gamma = s_1 ... s_{k-1}$ si $k \neq 1$ et $\gamma = Id$ sinon. Si $s_k^{-1} \neq s'_k$ ou si l'une de ces deux lettres est hyperbolique, alors $D(s_k) \cap D(s'_k) = \phi$ et donc $\gamma^{-1}x(s) \neq \gamma^{-1}x(s')$. Si $s_k^{-1} = s'_k$ et s_k est parabolique, considérons le plus petit des $i > k$ tel que $s_i \neq s_k$ et posons $g = \gamma\ s_k ... s_{i-1}$. On a $g^{-1}(x(s)) = \lim_{n\to+\infty} s_i ... s_{i+n}(0)$ et $g^{-1}x(s') = \lim_{n\to+\infty} s_{i-1}^{-1} ... s_k^{-1}\ s_k^{-1} s'_{k+1} ... s'_{k+n}(0)$. Comme $s'_{k+1} \neq s_k$, le point $g^{-1}(x(s))$ appartient à $D(s_k^{-1})$. Par ailleurs $g^{-1}x(s)$ n'appartient pas à $D(s_i)$ et $D(s_i) \cap D(s_k^{-1}) = \phi$ car s_i n'appartient pas à $\{s_k, s_k^{-1}\}$. Donc : $g^{-1}x(s') \neq g^{-1}x(s)$. En conclusion, nous venons de démontrer la proposition suivante qui exprime le fait que les points non paraboliques de $L(S(g_1,g_2))$ sont codés par les suites de $\sum_c^+$.

Proposition 1.10 *L'application $x : \sum^+ \to L(S(g_1,g_2))$ est surjective et sa rectriction à $\sum_c^+$ est une bijection sur $L_c(S(g_1,g_2))$.*

Comme conséquence de cette proposition, nous obtenons que les points fixes des isométries paraboliques de $L(S(g_1,g_2))$ sont "codés" (de façon non unique) par les suites $(s_i)_{i\geq 1}$ de $\sum^+$ constantes à partir d'un certain rang, et dont le terme constant est un générateur parabolique. Intéressons-nous plus généralement au "codage" des points fixes des isométries de $S(g_1,g_2)$. Soit $(s_1,...,s_k)$, une suite finie de $\mathcal{A}$ telle que $s_i \neq s_{i+1}^{-1}$ et $s_1^{-1} \neq s_k$, notons $(\overline{s_1,...,s_k})$ la suite périodique $s = (s_i)_{i\geq 1}$ de $\sum^+$ définie pour tout $i \geq 1$ par $s_i = s_{i+nk}$ quelque soit n dans $\mathbb{N}$.

On dit qu'une suite s de $\sum^+$ est **presque périodique** si s est périodique ou s'il existe $k \geq 1$ tel que $T^k(s)$ le soit.

Propriété 1.11 *Un point y de $L(S(g_1,g_2))$ est fixé par une isométrie non triviale de $S(g_1,g_2)$ si et seulement s'il existe une suite s dans $\sum^+$ presque périodique, telle que : $x(s) = y$.*

Démonstration.

Soit y dans $L(S(g_1,g_2))$. Supposons qu'il existe γ non trivial dans $S(g_1,g_2)$ tel que : $y = \gamma^+$. Ecrivons γ sous forme d'un mot réduit $\gamma = s_1 ... s_n$ et supposons $s_1 \neq s_n^{-1}$. Dans ce cas la suite périodique $s = (\overline{s_1,...,s_n})$ appartient à $\sum^+$ et $y = x(s)$. Si $s_1 = s_n^{-1}$, considérons le plus grand $1 \leq k < n$ tel que $s_k = s_{n-k+1}^{-1}$, posons $g = s_1 ... s_k$. Le point $g^{-1}(y)$ est fixé par le mot réduit $s_{k+1} ... s_{n-k}$. Puisque $s_{k+1} \neq s_{n-k}^{-1}$, on a $g^{-1}(y) = x(\overline{s_{k+1},...,s_{n-k}})$. Considérons la suite presque périodique s' définie par $s'_i = s_i$ pour $1 \leq i \leq k$ et $T^k(s') = (\overline{s_{k+1},...s_{n-k}})$. Puisque $s_{n-k} \neq s_{k+1}^{-1}$, cette suite appartient à $\sum^+$ et $g^{-1}(y) = x(s)$.

Réciproquement, considérons une suite presque périodique s de $\sum^+$. Soit $k \geq 0$ tel que $T^k(s)$ soit une suite périodique $s' = (\overline{s_{k+1}...s_n})$. On a $x(s') = \lim_{p \to +\infty} (s_{k+1}...s_n)^p(0)$ donc $x(s')$ est fixé par $\gamma = s_{k+1}...s_n$. Si $k = 0$, $x(s') = x(s)$, sinon $x(s) = g(x(s'))$ avec $g = s_1...s_k$ donc $x(s)$ est fixé par $g\ \gamma\ g^{-1}$. $\square$

2 Le groupe modulaire et deux de ses sous-groupes

Dans ce paragraphe nous nous intéressons au **groupe modulaire**, $PSL(2,\mathbb{Z})$, et à deux de ses sous-groupes. Dans chaque cas, nous donnons un domaine fondamental et analysons les points paraboliques.
Plaçons-nous dans le modèle du demi-plan $\mathbb{H}$ et cherchons un domaine fondamental du groupe modulaire.

Par un simple calcul, on montre que $2i$ n'est fixé par aucune isométrie non triviale de $PSL(2,\mathbb{Z})$. Il s'ensuit que le domaine de Dirichlet de $PSL(2,\mathbb{Z})$, au point $2i$ est bien défini. Posons $\mathcal{T}_1(z) = z + 1$ et $s(z) = -\frac{1}{z}$.

Propriété 2.1 *Le domaine* $D_{2i}(PSL(2,\mathbb{Z}))$ *est égal à l'ensemble* $E = \{z \in \mathbb{H}\ /\ |\ z\ | \geq 1$ *et* $-\frac{1}{2} \leq Re\ z \leq \frac{1}{2}\}$.

Démonstration.

Par définition du domaine de Dirichlet, $D_{2i}(PSL(2,\mathbb{Z}))$ est inclus dans $\mathbb{H}_{2i}(\mathcal{T}_1) \cap \mathbb{H}_{2i}(\mathcal{T}_1^{-1}) \cap \mathbb{H}_{2i}(s)$. Par ailleurs :
$\mathbb{H}_{2i}(\mathcal{T}_1) = \{z \in \mathbb{H}/Re\ z \leq \frac{1}{2}\}$,$\mathbb{H}_{2i}(\mathcal{T}_1^{-1}) = \{z \in \mathbb{H}/Re \geq -\frac{1}{2}\}$ et $\mathbb{H}_{2i}(s) = \{z \in \mathbb{H}\ /\ |\ z\ | \geq 1\}$ donc $D_{2i}(PSL(2,\mathbb{Z})$ est inclus dans E. Soit z dans $\mathring{E}$, supposons qu'il existe $\gamma(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ dans $PSL(2,\mathbb{Z}) - \{Id\}$ tel que $\gamma(z)$ appartienne à E. Nécessairement $c \neq 0$ car $|\ Re(z+b)\ | > \frac{1}{2}$ pour tout $b \in \mathbb{Z}_*$. On a $Im(\gamma z) = \frac{Im z}{|cz+d|^2}$. Comme z appartient à $\mathring{E}$:$|\ cz+d\ |^2 > (|\ c\ | - |\ d\ |)^2 + |\ c\ |\ |\ d\ |$. Donc, puisque $c \neq 0$, $Im(\gamma z) > Im\ z$. Si $\gamma(z)$ appartient à $\mathring{E}$, le

même raisonnement conduit à : $Im\ z > Im\ \gamma(z)$, ce qui est contradictoire. En conclusion, pour tout γ dans $PSL(2,\mathbb{Z}) - \{Id\}$, on a : $\gamma \overset{\circ}{E} \cap \overset{\circ}{E} = \phi$. Ceci entraine que $\overset{\circ}{E}$ est inclus dans $D_{2i}(PSL(2,\mathbb{Z}))$. Donc $D_{2i}(PSL(2,\mathbb{Z})) = E$.□

On déduit du lemme I.2.4 que la **surface modulaire**, $PSL(2,\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H}$, est :

Posons $\Delta = E \cap \{z \in \mathbb{H}/Re\ z \geq 0\} \cap \mathcal{T}_1(E \cap \{z \in \mathbb{H}/Re\ z \leq 0\})$. On déduit aisément de la propriété 2.1, le résultat suivant :

Corollaire 2.2 *Le domaine Δ est un domaine fondamental de $PSL(2,\mathbb{Z})$.*

Analysons les isométries paraboliques de $PSL(2,\mathbb{Z})$. Soient $\gamma(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ une telle isométrie et x son point fixe. Si $c = 0$, l'isométrie γ est une translation donc $x = \infty$, sinon $x = \frac{a-d}{2c}$. Ceci montre que $L_p(PSL(2,\mathbb{Z}))$ est inclus dans $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$. Montrons que ces deux ensembles sont égaux. Soit $\frac{p}{q}$ dans $\mathbb{Q}$, avec $(p,q) = 1$. Considérons p',q' dans $\mathbb{Z}$ tels que $pq' - qp' = 1$ et posons $g(z) = \frac{pz+p'}{qz+q'}$. Cette isométrie appartient à $PSL(2,\mathbb{Z})$ et $g(\infty) = \frac{p}{q}$ donc $\frac{p}{q}$ est fixé par $g\mathcal{T}_1 g^{-1}$. En conclusion, nous obtenons la propriété suivante :

Propriété 2.3 *Les isométries paraboliques de $PSL(2,\mathbb{Z})$ sont conjuguées dans $PSL(2,\mathbb{Z})$ aux éléments du groupe $< \mathcal{T}_1 >$ et $L_p(PSL(2,\mathbb{Z})) = \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$.*

Remarquons que pour démontrer la première partie de la propriété 2.3 nous aurions pu appliquer le corollaire I.2.10.

Le domaine $D_{2i}(PSL(2,\mathbb{Z}))$ est d'aire finie donc $PSL(2,\mathbb{Z})$ est géométriquement fini et par conséquent $L_c(PSL(2,\mathbb{Z})) = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

Considérons à présent deux sous-groupes de $PSL(2,\mathbb{Z})$.

Soit p l'homomorphisme de groupes de $PSL(2,\mathbb{Z})$ sur $SL(2,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ défini par : $p(\frac{az+b}{cz+d}) = \begin{pmatrix} \dot{a} & \dot{b} \\ \dot{c} & \dot{d} \end{pmatrix}$ où $\dot{n}$ correspond à la projection de n sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Posons

$\Gamma(2) = p^{-1}\begin{pmatrix} \dot{1} & \dot{0} \\ \dot{0} & \dot{1} \end{pmatrix}$. Ce sous-groupe est d'indice 6 dans $PSL(2,\mathbb{Z})$, plus précisément posons $r(z) = \frac{z-1}{z}$, on a :

$$(*)\ \Gamma(2) \setminus PSL(2,\mathbb{Z}) = \{p(id), p(r), p(r^2), p(\mathcal{T}_1^{-1}), p(\mathcal{T}_1^{-1} r), p(\mathcal{T}_1^{-1} r^2)\}.$$

Considérons l'ensemble Δ' défini par (voir figure 6) :

$$\Delta' = \Delta \cup r\Delta \cup r^2\Delta \cup \mathcal{T}_1^{-1}(\Delta) \cup \mathcal{T}_1^{-1} r(\Delta) \cup \mathcal{T}_1^{-1} r^2(\Delta)$$

On déduit de l'égalité $(*)$ et du corollaire 2.2, la propriété suivante :

Propriété 2.4 *L'ensemble Δ' est un domaine fondamental de* $\Gamma(2)$.

Aucun élément de $\Gamma(2) - \{Id\}$ ne fixe i. Les isométries $\mathcal{T}_1^{\pm 2}$, $\mathcal{T}_{-1}^{\pm 2}$ appartiennent à $\Gamma(2)$. On a :

$\mathbb{H}_i(\mathcal{T}_1^2) = \{z \in \mathbb{H} / Re\ z \leq 1\}$, $\mathbb{H}_i(\mathcal{T}_1^{-2}) = \{z \in \mathbb{H} / Re\ z \geq -1\}$, $\mathbb{H}_i(\mathcal{T}_{-1}^2) = \{z \in \mathbb{H}\ /\ \mid z + \frac{1}{2} \mid \geq \frac{1}{2}\}$, et $\mathbb{H}_i(\mathcal{T}_{-1}^{-2}) = \{z \in \mathbb{H}\ /\ \mid z - \frac{1}{2} \mid \geq \frac{1}{2}\}$.

Donc : $\Delta' = \mathbb{H}_i(\mathcal{T}_1^2) \cap \mathbb{H}_i(\mathcal{T}_1^{-2}) \cap \mathbb{H}_i(\mathcal{T}_{-1}^2) \cap \mathbb{H}_i(\mathcal{T}_{-1}^{-2})$.

Par conséquent $D_i(\Gamma(2))$ est inclus dans Δ'. Par ailleurs $D_i(\Gamma(2))$ et Δ' sont deux domaines fondamentaux de $\Gamma(2)$ donc $\Delta' = D_i(\Gamma(2))$.

Plaçons-nous dans le modèle du disque, posons $\mathcal{A} = \{\psi\mathcal{T}_1^2\psi^{-1}, \psi\mathcal{T}_1^{-2}\psi^{-1}, \psi\mathcal{T}_{-1}^2\psi^{-1}, \psi\mathcal{T}_{-1}^{-2}\psi^{-1}\}$. Les quatre demi-disques $(D(a))_{a\in\mathcal{A}}$ sont disjoints ou tangents.

On déduit du lemme I.2.4 que la surface $\Gamma(2)\backslash\mathbb{H}$ est :

Bien que le groupe engendré par a dans $\mathcal{A}$ et b dans $\mathcal{A}-\{a^{\pm 1}\}$, ne forme pas, au sens de la définition 1.1, un groupe de Schottky, car $D(a)\cup D(a^{-1})$ et $D(b)\cup D(b^{-1})$ ne sont pas disjoints, la démonstration du corollaire 1.3 reste encore valable dans ce cas-là. Le groupe $\Gamma(2)$ est engendré par $\mathcal{T}_1^2$ et $\mathcal{T}_{-1}^2$, et est libre .

Propriété 2.5 *Le groupe* $\Gamma(2)$ *est engendré par* $\mathcal{T}_1^2$ *et* $\mathcal{T}_{-1}^2$*, et est libre.*

Analysons à présent les isométries paraboliques de $\Gamma(2)$. Remarquons pour commencer que : le point ∞ est fixé par $\mathcal{T}_1^2$, le point 0 est fixé par $\mathcal{T}_{-1}^2$, le point -1 est fixé par $\mathcal{T}_{-1}^{-2}\mathcal{T}_1^2$ et 1 est fixé par $\mathcal{T}_{-1}^2\mathcal{T}_1^{-2}$. Ces quatre points sont paraboliques, -1 et 1 sont dans la même orbite car $\mathcal{T}_1^2(-1)=1$, et $\Gamma(2)(0)$, $\Gamma(2)(\infty)$, $\Gamma(2)(1)$ sont trois orbites disjointes. Soit γ une isométrie parabolique de $\Gamma(2)$ d'après le corollaire I.2.10, son point fixe appartient à l'une des trois orbites précédentes. Nous obtenons donc la propriété suivante :

Propriété 2.6 *Les isométries paraboliques de* $\Gamma(2)$ *sont les conjuguées des éléments de* $< \mathcal{T}_{-1}^{-2}\mathcal{T}_1^2 > \cup < \mathcal{T}_1^2 > \cup < \mathcal{T}_{-1}^2 >$.

Remarquons que $\Gamma(2)$ est géométriquement fini puisque l'aire de $D_i(\Gamma(2))$ est finie.

Introduisons à présent un second sous-groupe de $PSL(2,\mathbb{Z})$.
Posons $\alpha_1(z) = \frac{z+1}{z+2}$ et $\alpha_2(z) = \frac{z-1}{-z+2}$. Considérons les ensembles :

$$B(\alpha_1) = \{z \in \mathbb{H} \;/\; \mid z - \frac{1}{2} \mid \leq \frac{1}{2}\}, B(\alpha_1^{-1}) = \{z \in \mathbb{H} \;/ Im\ z \leq -1\},$$

$$B(\alpha_2) = \{z \in \mathbb{H} \;/\; \mid z + \frac{1}{2} \mid \leq \frac{1}{2}\} \text{ et } B(\alpha_2^{-1}) = \{z \in \mathbb{H} \;/ Im\ z \geq 1\}\ .$$

Pour tout $i = 1,2$ et $\epsilon = \pm 1$, on a

$$\alpha_i^{\epsilon}(\mathbb{H} - \overset{\circ}{B}(\alpha_i^{-\epsilon})) = B(\alpha_i^{\epsilon}).$$

Remarquons que : $\Delta' = \bigcap_{\substack{\epsilon=\pm 1 \\ i=1,2}} \mathbb{H} - \overset{\circ}{B}(\alpha_i^{-\epsilon})$.

Posons $\mathcal{A} = \{\alpha_1^{\pm 1}, \alpha_2^{\pm 1}\}$. Comme pour $\Gamma(2)$, le groupe engendré par α_1 et α_2 n'est pas un groupe de Schottky au sens de la définition 1.1. Mais les démonstrations du lemme 1.2 et du corollaire 1.3 sont encore valables. On obtient donc que le groupe $\Gamma = < \alpha_1, \alpha_2 >$ est libre et que pour tout γ dans $\Gamma - \{I\}$ on a : $\gamma \overset{\circ}{\Delta'} \cap \overset{\circ}{\Delta'} = \phi$.

Montrons que Δ' est un domaine fondamental. Remarquons que, contrairement au cas $\Gamma(2)$, a priori Δ' n'est pas un domaine de Dirichlet de Γ. Soit z dans $\mathbb{H} - \Delta'$, il existe α_1 dans $\mathcal{A}$ tel que z appartient à $B(\alpha_1)$. Posons $z_1 = a_1^{-1}(z)$. Si z_1 appartient à Δ', on pose $z_n = z_1$ pour tout $n \geq 1$. Sinon, il existe a_2 dans $\mathcal{A} - \{a_1^{-1}\}$ tel que z_1 appartient à $B(a_2)$ et on pose $z_2 = a_2^{-1}(z_1)$. De proche en proche, on construit une suite $(z_n)_{n\geq 1}$. Si $(z_n)_{n\geq 1}$ est stationnaire à partir du rang N, alors $a_N^{-1}...a_1^{-1}(z)$ appartient à Δ'. Sinon, posons $\gamma_n = a_1...a_n$. Par construction $\gamma_n^{-1}(z)$ appartient à $B(a_{n+1})$. Considérons une suite extraite $(\gamma_{n_p})_{p\geq 1}$ telle que $a_{n_p+1} = a$. Pour tout p, le point z appartient à $\gamma_{n_p}(B(a))$. Plaçons nous dans le modèle du disque. Notons S le demi-cercle bordant $\psi(B(a))$ et posons $b_i = \psi \ a_i \ \psi^{-1}$. Pour tout $p \geq 2$, le demi-disque $\psi(\gamma_{n_p}(B(a)))$ est inclus dans $\psi(\gamma_{n_{p-1}}(B(a)))$. Le point $\psi(z)$ appartient à chacun de ces demi-disques donc il existe un compact K dans $\mathbb{D}$ tel que : $b_1...b_{n_p}(S) \cap K \neq \phi$ pour tout $p \geq 1$. Or $\psi^{-1}(S)$ est inclus dans Δ' et $\Delta' = \Delta \cup r\Delta \cup r^2\Delta \cup \mathcal{T}_1\Delta \cup \mathcal{T}_1 r\Delta \cup \mathcal{T}_1 r^2\Delta$, par conséquent il existe une infinité d'éléments γ de $PSL(2,\mathbb{Z})$ tel que $\gamma\Delta$ rencontre $\psi^{-1}(K)$. Ceci contredit le fait que Δ soit un domaine fondamental localement fini de $PSL(2,\mathbb{Z})$. On en déduit que $(z_n)_{n\geq 1}$ est nécessairement stationnaire et donc qu'il existe γ dans $< \alpha_1,\alpha_2 >$ tel que : $\gamma(z) \in \Delta'$. Nous venons de démontrer la propriété suivante :

Propriété 2.7 *Le domaine Δ' est un domaine fondamental du groupe (libre) engendré par α_1 et α_2.*

On déduit du lemme I.2.4 que la surface $< \alpha_1,\alpha_2 > \backslash \mathbb{H}$ est :

Remarquons que $\Gamma(2)$ et $< \alpha_1,\alpha_2 >$ sont deux réseaux différents de $PSL(2,\mathbb{Z})$ ayant même domaine fondamental. Dans un premier cas la surface $\Gamma(2) \backslash \mathbb{H}$ est homéomorphe à une sphère privée de trois points, dans le second cas la surface ${}_{<\alpha_1,\alpha_2>} \backslash \mathbb{H}$ est un tore privé d'un point.

Analysons à présent les isométries paraboliques de $<\alpha_1,\alpha_2>$. Commençons par remarquer que le commutateur $[\alpha_2^{-1},\alpha_1^{-1}]$ est une translation et que le groupe engendré par cette translation est le stabilisateur du point ∞. Considérons une isométrie parabolique γ et écrivons la sous-forme d'un mot réduit $a_1...a_n$ avec $a_i \in \mathcal{A}$. Supposons $a_1 \neq a_n^{-1}$, dans ce cas, $\lim\limits_{k\to+\infty} \gamma^k(i)$ appartient à $B(a_1)$ et $\lim\limits_{k\to+\infty} \gamma^{-k}(i)$ appartient à $B(a_n^{-1})$. Ces deux points sont égaux à l'unique point fixe x de γ, donc x appartient à $\{-1,0,1,\infty\}$. Si $x=\infty$ alors γ appartient à $<[\alpha_2^{-1},\alpha_1^{-1}]>$. Par ailleurs $1=\alpha_1(\infty)$, $-1=\alpha_2(\infty)$, et $0=\alpha_2^{-1}\alpha_1(\infty)$ donc dans tous les cas, γ est conjugué à une puissance de $[\alpha_2^{-1},\alpha_1^{-1}]$. En conclusion, nous venons de démontrer le résultat suivant :

Propriété 2.8 *Une isométrie de $<\alpha_1,\alpha_2>$ est parabolique si et seulement si elle est conjuguée à une isométrie non triviale de $<[\alpha_2^{-1},\alpha_1^{-1}]>$.*

3 Points limites de $PSL(2,\mathbb{Z})$ et codage en fractions continues.

On rappelle que $r(z)=\frac{z-1}{z}$. Posons $T=\Delta\cup r\Delta\cup r^2\Delta$.

L'ensemble T est un triangle **idéal** de sommets ∞,1,0, qui, puisque Δ est un domaine fondamental de $PSL(2,\mathbb{Z})$, vérifie :

$$\bigcup_{\gamma\in PSL(2,\mathbb{Z})} \gamma T=\mathbb{H} \text{ et si } \gamma \overset{\circ}{T}\cap \overset{\circ}{T}\neq \phi \text{ alors } \gamma\in\{Id,r,r^2\}.$$

Ce pavage de $\mathbb{H}$ par les images de T est appelé **pavage de Farey**. Notons L la géodésique non orientée d'extrémités 0 et ∞, et L^+ cette géodésique orientée de 0 vers ∞. On appelle **lignes de Farey** les images de L par $PSL(2,\mathbb{Z})$. Les extrémités de $\mathcal{T}_1(L)$ sont 1, ∞, celles de $\mathcal{T}_{-1}(L)$ sont 0, 1 donc les côtés de T et, par conséquent les côtés du pavage de Farey, sont les lignes de Farey. Interprétons géométriquement l'irrationnalité d'un réel.

Lemme 3.1 *Soit x dans $\mathbb{H}(\infty)$. Le rayon $[i,x)$ rencontre un nombre fini de lignes de Farey si et seulement si x appartient à $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$.*

Démonstration.

Supposons que x appartienne à $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$, dans ce cas, d'après la propriété II-2-3, il existe γ dans $PSL(2,\mathbb{Z})$ tel que : $\gamma(x) = \infty$. Puisque le rayon $\gamma^{-1}([i,x))$ est une demi-droite verticale passant par $\gamma^{-1}(i)$, il existe n dans $\mathbb{Z}$ et z dans $[i,x)$ tels que : $\mathcal{T}_1^n\gamma^{-1}([z,x))$ soit inclus dans T. Le domaine Δ est localement fini, donc $\mathcal{T}_1^n\gamma^{-1}([i,z])$ ne rencontre qu'un nombre fini d'images de T par $PSL(2,\mathbb{Z})$. En conclusion, $\mathcal{T}_1^n\gamma^{-1}([z,x))$, et donc $[z,x)$, ne rencontre qu'un nombre fini de lignes de Farey.

Supposons que $[i,x)$ ne rencontre qu'un nombre fini de lignes de Farey, il existe alors z dans $[i,x)$ et γ dans $PSL(2,\mathbb{Z})$ tels que $[z,x)$ soit inclus dans γ (T). Autrement dit $[\gamma^{-1}(z),\gamma^{-1}(x))$ est un rayon géodésique inclus dans T. Par conséquent, $\gamma^{-1}(x)$ appartient à $\{0,1,\infty\}$ et donc x appartient à $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$. $\square$ Soient x un irrationnel **positif** et $r : [0, +\infty) \to [i,x)$ le paramétrage par longueur d'arcs de $[i,x)$ tel que $r(0) = i$. D'après le lemme précédent, $[i,x)$ rencontre une infinité de lignes de Farey. Notons $(L_n)_{n\geq 1}$ la suite de ces lignes rencontrées successivement par $(r(t))_{t>0}$, ordonnées dans le sens des t croissants (voir figure 12). Pour chaque n, on oriente L_n de sorte que l'angle, au point d'intersection $r(t_n)$, entre $[i,x)$ et L_n, appartienne à $]0,\pi[$. On note L_n^+, la géodésique L_n ainsi orientée. Posons $L_n^+ = (x_n y_n)$. Par définition des lignes de Farey, il existe g dans $PSL(2,\mathbb{Z})$ tel que $L_n = g_n(L)$. Si $g_n(0) = x_n$ et $g_n(\infty) = y_n$, on a $g_n(L^+) = L_n^+$ sinon, $g_n s(L^+) = L_n^+$. Dans les deux cas, il existe une isométrie γ_n dans $PSL(2,\mathbb{Z})$ telle que $\gamma_n(L^+) = L_n^+$. Remarquons que γ_n est unique.

Considérons le rayon géodésique $\gamma_n^{-1}([i,x))$. Puisque $L_n^+ = \gamma_n(L^+)$, ce rayon coupe L^+ et l'angle au point d'intersection $\gamma_n^{-1}(r(t_n))$ entre $\gamma_n^{-1}([i,x))$ et L^+ appartient à $]0,\pi[$. Donc, $\gamma_n^{-1}(L_{n+1}^+)$ est égal à $\mathcal{T}_{-1}(L^+)$ ou $\mathcal{T}_1(L^+)$. Par conséquent : $\gamma_{n+1} = \gamma_n\ \mathcal{T}_{\epsilon_n}$ avec $\epsilon_n = \pm\ 1$. Si $\epsilon_1 = 1$, posons $n_0 = Max\{n \geq 1/\epsilon_k = 1$ pour tout $1 \leq k \leq n\}$ et si $\epsilon_1 = -1$, posons $n_0 = 0$. Pour tout $p \geq 1$, posons $n_p = Max\{n > n_{p-1}/\epsilon_k = (-1)^p$ pour tout $n_{p-1} < k \leq n\}$. Remarquons que n_k appartient à $\mathbb{N}^*$ pour tout $k \geq 1$. Introduisons les isométries $g_k = \mathcal{T}_1^{n_0}\ \mathcal{T}_{-1}^{n_1}...\mathcal{T}_{(-1)^k}^{n_k}$ et notons $[n_0; n_1,...,n_k]$ le rationnel :

$$[n_0; n_1,...,n_k] = n_0 + \frac{1}{n_1 + \frac{1}{n_2 + . + \frac{1}{n_{k-1} + \frac{1}{n_k}}}}$$

En utilisant les relations : $\mathcal{T}_1^n(z) = z+n$ et $\mathcal{T}_{-1}^n(z) = \frac{1}{n+\frac{1}{z}}$ et en raisonnant par récurrence, on obtient le lemme suivant :

Lemme 3.2 *Soit $k \geq 2$. Si k est pair, $g_k(0) = [n_0; n_1,...,n_k]$ et $g_k(\infty) = [n_0; ...n_{k-1}]$. Si k est impair, $g_k(0) = [n_0; n_1,...n_{k-1}]$ et $g_k(\infty) = [n_0; n_1...n_k]$.*

Nous sommes maintenant en mesure de définir le développement en fractions continues de x.

Proposition 3.3 *La suite de rationnels $([n_0; n_1,...,n_k])_{k\geq 1}$ converge vers x. De plus, s'il existe une suite $(n'_k)_{k\geq 1}$ vérifiant : $n'_0 \in \mathbb{N}, n'_k \in \mathbb{N}^*$ pour tout $k \geq 1$ et $\lim\limits_{k\to+\infty} [n'_0; n'_1,...n'_k] = x$ alors $n_k = n'_k$ pour tout $k \geq 0$.*

Démonstration.

La géodésique $g_k(L)$ rencontre le rayon $[i,x)$. Le point x appartient à l'intervalle d'extrémités $g_k(0)$, $g_k(\infty)$. Pour tout $k \geq 1$, les rationnels $g_k(0)$ et $g_k(\infty)$ appartiennent à l'intervalle $[n_0,n_0+1]$ donc $0 < \mid g_k(0) - g_k(\infty) \mid \leq 1$. Montrons que $\lim\limits_{k\to+\infty} \mid g_k(0) - g_k(\infty) \mid = 0$. Supposons qu'il existe $d > 0$ et $(g_{k_p})_{p\geq 1}$ tels que $\mid g_{k_p}(0) - g_{k_p}(\infty) \mid > d$. Dans ce cas, la géodésique $g_{k_p}(L)$ rencontre le segment I de $\mathbb{H}$ d'extrémités $n_0 + i\frac{d}{2}$ et $n_0 + 1 + i\frac{d}{2}$. Puisque L est un côté de T, et puisque T est une réunion finie d'images de Δ, on obtient qu'il existe une infinité d'isométries γ de $PSL(2,\mathbb{Z})$ telle que : $\gamma\Delta$ rencontre le compact I. Ceci contredit le fait que Δ soit localement fini. On déduit de cette propriété et du lemme 3.1 que la suite $([n_0; n_1,...n_k])_{k\geq 1}$ converge vers x.

Montrons l'unicité. Supposons que $([n'_0; n'_1,...n'_k])_{k\geq 1}$ converge vers x. On a alors $\lim\limits_{p\to+\infty} \mathcal{T}_1^{n'_0}...\mathcal{T}_1^{n'_{2p}}(0) = \lim\limits_{p\to+\infty} \mathcal{T}_1^{n_0}...\mathcal{T}_1^{n_{2p}}(0)$.

D'après le lemme 3.2, le rationnel $\mathcal{T}_1^{n'_0}...\mathcal{T}_1^{n'_{2p}}(0)$ appartient à $]n'_0 + n'_0 + 1]$ et $\mathcal{T}_1^{n_0}...\mathcal{T}_1^{n_{2p}}(0)$ appartient à $]n_0 + n_0 + 1]$ donc $n'_0 = n_0$. Par conséquent, $\lim\limits_{p\to+\infty} \mathcal{T}_{-1}^{n'_1}...\mathcal{T}_1^{n'_{2p}}(0) = \lim\limits_{p\to+\infty} \mathcal{T}_{-1}^{n_1}...\mathcal{T}_1^{n_{2p}}(0)$. En appliquant le même raisonnement aux suites $(\frac{1}{[0;n'_1,...n'_{2p}]})_{p\geq 1} = ([n'_1; n'_2...n'_{2p}])_{p\geq 1}$ et $(\frac{1}{[0;n_1,...n_{2p}]_{p\geq 1}}) =$

$([n_1; n_2...n_{2p}])_{p\geq 1}$ on obtient $n_1 = n'_1$. De proche en proche, on a $n_k = n'_k$ pour tout $k \geq 0$. $\square$.

La suite $(n_k)_{k\geq 0}$ est appelée **développement en fractions continues de** x.

Dans la suite nous nous restreignons aux irrationnels positifs. Considérons l'application F de $\mathbb{R}^+ - \mathbb{Q}^+$ dans l'ensemble

$$S = \{(n_i)_{i\geq 1} / n_0 \in \mathbb{N}, n_i \in \mathbb{N}^* \text{ pour } i \geq 1\}$$

qui à x associe son développement en fraction continue $F(x)$.

Propriété 3.4 *L'application $F : \mathbb{R}^+ - \mathbb{Q}^+ \to S$ est bijective.*

Démonstration.

D'après la proposition 3.3, il suffit de montrer que F est surjective. Soit $(n_k)_{k\geq 0}$ dans S, posons $g_k = \mathcal{T}_1^{n_0} \circ ... \circ \mathcal{T}_{(-1)^k}^{n_k}$. En reprenant l'argument utilisé dans la démonstration de la proposition 3.3, on montre que $\lim\limits_{k\to+\infty} \mid g_k(0) - g_k(\infty) \mid = 0$. Si k est impair, $g_{k+1}(\infty) = g_k(\infty)$, et $g_{k+1}(0)$ appartient au segment d'extrémité $g_k(\infty), g_k(0)$ car g_k préserve l'orientation et $\mathcal{T}_1^{n_{k+1}}(0) = n_{k+1}$ est positif. Si k est impair alors $g_{k+1}(0) = g_k(0)$ et, pour les mêmes raisons, $g_{k+1}(\infty)$ appartient au segment d'extrémités $g_k(\infty), g_k(0)$. Dans tous les cas, on obtient que la suite des segments $(I_k)_{k\geq 1}$ d'extrémités $g_k(0), g_k(\infty)$ est emboitée et donc que les suites $(g_k(0))_{k\geq 1}$ et $(g_k(\infty))_{k\geq 1}$ convergent vers le même réel positif x. D'après le lemme 3.2, on a : $x = \lim\limits_{k\to+\infty} [n_0; n_1, n_2...n_k]$. Ce point appartient aux segments I_k donc $[i,x)$ rencontre $g_k(L)$. D'après le lemme 3.1, x est irrationnel. $\square$

Le développement en fractions continues permet donc de coder les irrationnels positifs. Intéressons-nous au codage des points fixes des isométries hyperboliques de $PSL(2,\mathbb{Z})$.

Propriétés 3.5

(i) *Un réel positif est fixé par une isométrie hyperbolique de $PSL(2,\mathbb{Z})$ si et seulement si son développement en fractions continues est presque périodique.*

(ii) *Une isométrie hyperbolique de $PSL(2,\mathbb{Z})$ est conjuguée dans $PSL(2,\mathbb{Z})$ à une isométrie de la forme $\mathcal{T}_1^{m_1} \mathcal{T}_{-1}^{m_2} ... \mathcal{T}_{-1}^{m_k}$ avec $m_i > 0$ et k pair.*

Démonstration.

(i) Soit x un irrationnel positif. Supposons que la suite $F(x) = (n_i)_{i\geq 0}$ soit périodique. Dans ce cas n_0 n'est pas nul et il existe un k impair tel que $x = \lim\limits_{p\to+\infty} (\mathcal{T}_1^{n_0} ... \mathcal{T}_{-1}^{n_k})^p(0)$. Ceci montre que x est fixé par $\mathcal{T}_1^{n_0} ... \mathcal{T}_{-1}^{n_k}$, qui est hyperbolique car x est irrationnel. Si $F(x)$ est périodique à partir

d'un rang $K \geq 1$, il suffit d'appliquer le raisonnement précédent au point $(\mathcal{T}_1^{n_0}...\mathcal{T}_{-1}^{n_{2k-1}})^{-1}(x)$.
Considérons à présent une isométrie hyperbolique γ de $PSL(2,\mathbb{Z})$. Posons $F(\gamma^+) = (n_i)_{i\geq 0}$. D'après la proposition 3.3, les suites $(g_k(0))_{k\geq 0}$ et $(g_k(\infty))_{k\geq 0}$ convergent vers γ^+. A partir d'un rang impair k le segment d'extrémités $g_k(0)$,$g_k(\infty)$ ne contient pas γ^-. Par conséquent, il existe $k' > k$ tel que $\gamma L_k^+ = L_{k'}^+$. Ceci entraine que : $\gamma g_k = g_{k'}$. Donc que $\gamma = g_k \mathcal{T}_1^{n_{k+1}}...\mathcal{T}_{(-1)^{k'}}^{n'_k} g_k^{-1}$. Si k' est pair, $F(g_k(\gamma^+))$ est périodique, sinon $F(g_k(\gamma^+))$ est presque périodique. Dans les deux cas, on en déduit que $F(\gamma^+)$ est presque périodique.

(ii) Soit γ une isométrie hyperbolique de $PSL(2,\mathbb{Z})$. Quitte à conjuguer γ par une translation, on peut supposer $\gamma^+ > 0$. D'après la fin de la démonstration précédente, γ est conjugué à $\mathcal{T}_1^{n_{k+1}}...\mathcal{T}_{(-1)^{k'}}^{n'_k}$ et donc, à une isométrie de la forme $\mathcal{T}_1^{m_1}...\mathcal{T}_{-1}^{m_p}$ avec $m_i > 0$ et p pair. □

Analysons à présent la nature arithmétique des points fixes des isométries hyperboliques de $PSL(2,\mathbb{Z})$.

Considérons une isométrie hyperbolique γ de la forme $\mathcal{T}_1^{m_1}...\mathcal{T}_{-1}^{m_k}$ avec $m_i > 0$. Son point fixe attractif est strictement supérieur à 1. Par ailleurs, $\gamma^- = \lim_{p\to+\infty} (\mathcal{T}_{-1}^{-m_k}...\mathcal{T}_1^{-m_0})^p(0)$, donc $0 < \gamma^- < -1$. Posons $\gamma(z) = \frac{az+b}{cz+d}$. Les irrationnels γ^- et γ^+ sont solutions de l'équation à coefficients entiers $Ax^2 + Bx - C = 0$. Avec $A = c$,$B = d - a$ et $C = -b$.
Réciproquement considérons une équation de la forme :

$$Ax^2 + Bx - C = 0$$

avec A,B,C dans $\mathbb{Z}^*$, admettant une racine α irrationnelle > 1 et une autre $-1 < \beta < 0$. On peut supposer $A > 0$ et $C > 0$. Soit $(n_i)_{i\geq 0}$ le développement en fractions continues de α. Posons $x_0 = \alpha$, $y_0 = \beta$ et pour k pair non nul posons : $x_k = (\mathcal{T}_1^{n_0}...\mathcal{T}_{-1}^{n_{k-1}})^{-1}(\alpha)$ et $y_k = (\mathcal{T}_1^{n_0}...\mathcal{T}_{-1}^{n_{k-1}})^{-1}(\beta)$. Puisque $x_k = \lim_{p\to+\infty}[n_k; n_{k+1},...,n_{k+p}]$, le réel x_k appartient à $]+1,+\infty[$. Par ailleurs, en raisonnant par récurrence, on montre que y_k appartient à l'intervalle $]-1,0[$ et que les deux réels x_k et y_k sont solutions d'une équation :

$$A_k\, x^2 + B_k\, x - C_k = 0$$

avec A_k,B_k,$C_k \in \mathbb{Z}^*$,$A_k > 0$,$C_k > 0$ et $B_k^2 + 4A_kC_k = B^2 + 4AC$.
Les coefficients A_k,B_k,C_k appartiennent donc à un ensemble fini. Par conséquent, il existe $k_2 > k_1 \geq 0$ tel que $A_{k_1} = A_{k_2}$,$B_{k_1} = B_{k_2}$,$C_{k_1} = C_{k_2}$. Posons $p = k_2 - k_1$. Pour tout $n \geq 1$, on a $x_{k_1+np} = x_{k_2}$ et $y_{k_1+np} = y_{k_2}$. Le développement en fractions continues de x_k étant $(n_{k+i})_{i\geq 0}$, la suite $(n_i)_{i\geq 0}$

est presque périodique. Montrons qu'elle est périodique. Soit k_0 le plus petit des entiers k pair ≥ 0 pour lesquels il existe k' (pair) $> k$ tel que $A_k = A_{k'}$,$B_k = B_{k'}$ et $C_k == C_{k'}$.
Supposons $k_0 \neq 0$. On a $x_{k_0} = \mathcal{T}_1 n_{k_0} \mathcal{T}_{-1}^{n_{k_0-1}}(x_{k_0-2})$ et $x_{k_0} = \mathcal{T}_1^{n_{k'_0}} \mathcal{T}_{-1}^{n_{k'_0-1}}(x_{k'_0-2})$ donc $\mathcal{T}_1^{n_{k_0}-n'_{k_0}} \mathcal{T}_{-1}^{n_{k_0-1}}(x_{k_0-2}) = \mathcal{T}_{-1}^{n_{k'_0-1}}(x'_{k_0-2})$.
Si $n_{k_0} \neq n'_{k_0}$, le premier membre de l'égalité appartient à $\mathbb{R} - [0{,}1]$, ce qui est impossible car le second membre appartient à $[0{,}1]$. Donc $n_{k_0} = n_{k'_0}$. Si $n_{k_0-1} \neq n_{k'_0-1}$, le réel $\mathcal{T}_{-1}^{n_{k_0-1}-n'_{k_0-1}}(x_{k_0-2})$ appartient à $]-\infty{,}1]$ or ce réel est égal à $x_{k'_0-2}$ qui est > 1, donc $n'_{k_0-1} = n_{k_0-1}$. Par conséquent $x_{k_0-2} = x_{k'_0-2}$ et $y_{k_0-2} = y_{k'_0-2}$. Donc $A_{k_0-2} = A_{k'_0-2}$,$B_{k_0-2} = B_{k'_0-2}$ et $C_{k_0-2} = C_{k'_0-2}$, ce qui contredit l'hypothèse faite sur k_0. En conclusion nous venons de démontrer la proposition suivante :

Proposition 3.6 *Soit x un irrationnel > 1. La suite $F(x)$ est périodique si et seulement s'il existe une équation de la forme $AX^2 + BX + C = 0$ avec $A{,}B{,}C \in \mathbb{Z}$ dont les racines sont x et un réel appartenant à $]-1{,}0[$.*

Pour terminer, donnons un lien entre un irrationnel dont le développement en fraction continue est périodique et la longueur de l'isométrie hyperbolique dont il est le point fixe attractif. Considérons la fonction σ de l'ensemble des irrationnels supérieurs à 1 sur lui-même défini par : $\sigma(x) = \frac{1}{x-n_0}$, où n_0 est le premier terme de $F(x)$. On a : $F(\sigma(x)) = (n_{i+1})_{i\geq 0}$. Posons $\sigma^\circ(x) = x$.

Propriété 3.7 *Soit γ une isométrie de la forme $\gamma = \mathcal{T}_1^{m_1} \mathcal{T}_{-1}^{m_2} ... \mathcal{T}_{-1}^{m_k}$ avec m_i dans $\mathbb{N}^*$ et k pair. On a*

$$\ell(\gamma) = 2\ Ln\ (\gamma^+ \times \sigma(\gamma^+) \times ... \times \sigma^{k-1}(\gamma^+)).$$

Démonstration.

Posons $\gamma(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $\lambda = e^{\frac{\ell(\gamma)}{2}}$. On a

$$M \begin{pmatrix} \gamma^+ \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \gamma^+ \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Introduisons les matrices $D_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & n \end{pmatrix}$ et $R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Ces matrices vérifient les relations suivantes :

$$R^2 = Id, D_n\ R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix} \text{ et } R\ D_n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En utilisant ces relations, on obtient :

$$\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ \gamma^+ \end{pmatrix} = D_{m_1} ... D_{m_k} \begin{pmatrix} 1 \\ \gamma^+ \end{pmatrix}.$$

Par ailleurs, soit $x \neq 0$, on a $D_m = \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ m + \frac{1}{x} \end{pmatrix}$.

Donc $D_{m_k} \begin{pmatrix} 1 \\ \gamma^+ \end{pmatrix} = \gamma^+ \begin{pmatrix} 1 \\ m_k + \frac{1}{\gamma^+} \end{pmatrix}$. Or $m_k + \frac{1}{\gamma^+} = \sigma^{k-1}(\gamma^+)$, donc $\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ \gamma^+ \end{pmatrix} = \gamma^+ \sigma^{k-1}(\gamma^+) D_{m_1} ... D_{m_{k-1}} \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma^{k-1}(\gamma^+) \end{pmatrix}$.

De proche en proche, on obtient :

$$\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ \gamma^+ \end{pmatrix} = \gamma^+ \sigma^{k-1}(\gamma^+) ... \sigma^2(\gamma^+) D_{m_1} \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma(\gamma^+) \end{pmatrix}.$$

Or $D_{m_1} \begin{pmatrix} 1 \\ \sigma(\gamma^+) \end{pmatrix} = \sigma(\gamma^+) \begin{pmatrix} 1 \\ \gamma^+ \end{pmatrix}$ donc $\lambda = (\gamma^+ \prod_{i=1}^{k-1} \sigma^i(\gamma^+))$. □

Finissons ce chapitre en donnant une interprétation hyperbolique du nombre d'or.

Soit γ une isométrie hyperbolique de $PSL(2,\mathbb{Z})$. D'après la proposition 3.5, cette isométrie est conjuguée à une isométrie de la forme $\mathcal{T}_1^{m_1} ... \mathcal{T}_{-1}^{m_k}$. Pour $1 \leq i \leq k$, remarquons que $\sigma^i(x)$ est de la forme $m_{i+1} + \frac{1}{m_{i+2} + x_i}$ avec $0 < x_i < 1$. Ainsi, si l'un des $m_i = 2$, il existe $0 \leq i,j \leq k-1$ et $i \neq j$ tels que $\sigma^i(x) = 2 + \frac{1}{y}$ avec $y > 1$ et $\sigma^j(x) = m_{j+1} + \frac{1}{2 + x_j}$ avec $0 < x_j < 1$. On déduit de ces remarques et de la propriété 3.6, l'inégalité suivante :

$$\ell(\gamma) > 2 \ Ln \ 2 \times (1 + \frac{1}{3}) = 2 \ Ln \ \frac{8}{3}.$$

Si l'un des m_i est ≥ 3, on a : $\ell(\gamma) \geq 2 Ln \ 3$.
Si tous les m_i sont égaux à 1 alors γ est une puissance de $\mathcal{T}_1 \mathcal{T}_{-1}$. Le point fixe attractif x de $\mathcal{T}_1 \mathcal{T}_{-1}$ vérifie $x = 1 + \frac{1}{x}$ donc x est le **nombre d'or** $\mathcal{N} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\ell(\mathcal{T}_1 \mathcal{T}_{-1}) = 2 \ Ln \ (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^2$. On déduit de ces calculs le résultat suivant :

Corollaire 3.8 *Pour toute isométrie hyperbolique γ de $PSL(2,\mathbb{Z})$, on a : $\ell(\gamma) \geq 2 \ Ln \ (\mathcal{T}_1 \mathcal{T}_{-1}) = 4 Ln \ \mathcal{N}$.*

Le nombre d'or correspond donc à la racine quatrième de l'exponentielle de la longueur de la plus petite géodésique fermée de la surface modulaire $PSL(2,\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H}$.

Commentaires

Le codage de l'ensemble limite d'un groupe de Schottky se généralise aux groupes fuchsiens géométriquement finis de $PSL(2,\mathbb{R})$ ([S2]).

La notion de groupes de Schottky a également un sens dans le contexte des variétés de Hadamard, le paragraphe 1 s'adapte donc à ce cas-là ([D-P2]).

La présentation géométrique du développement en fractions continues exposée dans les paragraphes 2 et 3 s'appuie essentiellement sur deux articles ([S3], [D-P1]). Signalons également la construction d'un exemple intéressant de réseau de $PSL(2,\mathbb{Q})$ non commensurable à $PSL(2,\mathbb{Z})$ dont l'ensemble des points paraboliques est $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ ([L-R]).

Chapitre III

Dynamique topologique du flot géodésique.

Nous commençons ce chapitre par des considérations générales sur la dynamique topologique d'un flot.

Considérons un espace topologique métrisable Y et une action continue, ϕ de $(\mathbb{R},+)$ dans le groupe des homéomorphismes de Y, noté Homéo (Y), équipé de la convergence uniforme sur les compacts. Parmi les points de Y, on distingue les points **errants** y pour lesquels il existe un voisinage $V(y)$ et un réel $T \in \mathbb{R}$ tels que : $\phi_t(V(y)) \cap V(y) = \phi$, quelque soit $t \geq T$. Le complémentaire de l'ensemble de ces points, noté $\Omega_\phi(Y)$, est invariant par le flot. Cet ensemble est fermé. En effet, soient $(y_n)_{n\geq 1}$ une suite de $\Omega_\phi(Y)$ convergeant vers y et V un voisinage ouvert de y, pour n suffisamment grand, y_n appartient à V. Le point y_n n'étant pas errant, il existe une suite non bornée $(t_k)_{k\geq 1}$ de $\mathbb{R}^+$ telle que : $\phi_{t_k}(V) \cap V \neq \phi$, donc y appatient à $\Omega_\phi(Y)$. On dit qu'un point $y \in Y$ est **positivement** (resp. **négativement**) **convergent**, s'il existe une suite non bornée $(t_n)_{n\geq 1}$ de $\mathbb{R}^+$ (resp. $\mathbb{R}^-$) telle que $(\phi_{t_n}(y))_{n\geq 1}$ converge vers un point z de Y. Soient V un voisinage de z et $N > 0$ tels que $\phi_{t_n}(y)$ appartienne à V pour tout $n \geq N$. On a $\phi_{t_n}(y) = \phi_{t_n - t_N}(\phi_{t_N}(y))$ et $\phi^{-1}_{t_n - t_N} = \phi_{t_N - t_n}$. Posons $s_n = t_n - t_N$, si $t_n > 0$ et $s_n = t_N - t_n$ sinon. La suite $(s_n)_{n\geq N}$ n'est pas majorée et $\phi_{s_n}(V) \cap V \neq \phi$ donc z appartient à $\Omega_\phi(Y)$. Dans le cas particulier où $z = y$, le point y est dit **positivement** (resp. **négativement**) **récurrent**. Par exemple, si y est **périodique**, c'est-à-dire s'il existe $T > 0$ tel que $\phi_T(y) = y$, le point y est positivement et négativement récurrent. Un point qui n'est pas positivement (resp. négativement) convergent est dit **positivement** (resp. **négativement**) **divergent**. On verra dans la suite qu'un tel point peut éventuellement appartenir à $\Omega_\phi(Y)$.

1 Définition du flot géodésique.

Considérons le fibré unitaire tangent du demi-plan de Poincaré, $T^1\mathbb{H}$, muni de sa distance D définie §I-1. Soit $u \in T^1\mathbb{H}$, notons $u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{H}$ le paramètrage par longueur d'arcs, d'origine $u(0)$, de la géodésique orientée dont l'élément de contact en $u(0)$ est u et notons $\tilde{g}_.$ l'application de $\mathbb{R}$ dans le groupe des difféomorphismes de $T^1\mathbb{H}$, équipé de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts, définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall u \in T^1\mathbb{H} \quad \tilde{g}_t(u)(0) = u(t) \text{ et } \overrightarrow{\tilde{g}_t(u)} = \frac{d}{ds} |_{s=t}^{u(s)}$$

On a $\tilde{g}_o = Id$ et $\tilde{g}_{t+t'} = \tilde{g}_t \circ \tilde{g}_{t'}$, par ailleurs $D(\tilde{g}_t(u),\tilde{g}_{t'}(u)) = 2|t-t'|$ donc $\tilde{g}$ est une action continue de $(\mathbb{R},+)$ sur $T^1\mathbb{H}$. L'image, notée $\tilde{g}_{\mathbb{R}}$, de $\mathbb{R}$ par $\tilde{g}$ est appelée **flot géodésique** sur $T^1\mathbb{H}$.

Soit γ un élément de G, l'application $\gamma \circ u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{H}$ est le paramétrage par longueur d'arcs, d'origine $\gamma(u(0))$, de la géodésique orientée dont l'élément de contact en $\gamma(u(0))$ est $\gamma(u)$. On a donc la relation :

$$(R_1) \qquad (\gamma \circ \tilde{g}_t)(u) = (\tilde{g}_t \circ \gamma)(u)$$

Notons $u(+\infty)$ (resp. $u(-\infty)$) le point de $\mathbb{H}(\infty)$, extrémité positive (resp. négative) de la géodésique orientée $u(\mathbb{R})$. Remarquons que pour tout γ dans G, on a $(\gamma \circ u)(\pm\infty) = \gamma(u(\pm\infty))$.

Notons $\mathbb{H}(\infty) \overset{\Delta}{\times} \mathbb{H}(\infty)$ l'ensemble $\mathbb{H}(\infty) \times \mathbb{H}(\infty)$ privé de sa diagonale.

Le flot géodésique est conjugué à une action de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{H}(\infty) \overset{\Delta}{\times} \mathbb{H}(\infty) \times \mathbb{R}$. En effet considérons l'application F suivante :

$$\begin{array}{rcl} F : T^1\mathbb{H} & \longrightarrow & \mathbb{H}(\infty) \overset{\Delta}{\times} \mathbb{H}(\infty) \times \mathbb{R} \\ u & \longmapsto & (u(-\infty),u(+\infty),t_u = B_{u(+\infty)}(i,u(0))) \end{array}$$

Propriété 1.1 *L'application F est un homéomorphisme.*

Démonstration

Notons u l'élément de $T^1\mathbb{H}$ défini par : $u(-\infty) = 0, u(+\infty) = \infty, u(0) = i$. On rappelle que l'application $f : G \longrightarrow T^1\mathbb{H}$ qui à γ associe $\gamma(u)$ est un homéomorphisme (chapitre I). Considérons l'application $F' = F \circ f$. Cette application est définie par $F'(\gamma) = (\gamma(0), \gamma(\infty), B_{\gamma(\infty)}(i, \gamma(i)))$. Montrons que F' est un homéomorphisme. Soient γ, γ' dans G tels que $\gamma(0) = \gamma'(0), \gamma(\infty) = \gamma'(\infty)$. Si $\gamma \neq \gamma'$ alors $h = \gamma^{-1}\gamma'$ est hyperbolique, 0, ∞ sont fixés par h et donc $|B_\infty(i, h(i))| = \ell(h) > 0$. Supposons : $B_{\gamma(\infty)}(i, \gamma(i)) = B_{\gamma'(\infty)}(i, \gamma'(i))$. Cette relation entraîne $B_{\gamma(\infty)}(\gamma(i), \gamma'(i)) = 0$ donc $B_\infty(i, h(i)) = 0$. Ceci contredit le fait que h soit hyperbolique et montre donc que F' est injective.

Soit (y^-, y^+, t) dans $\mathbb{H}(\infty) \overset{\Delta}{\times} \mathbb{H}(\infty) \times \mathbb{R}$, considérons le point z' appartenant à l'intersection de la géodésique $(y^- y^+)$ et de l'horocycle $H_t(y^+)$. L'image par F de l'élément de contact u' en z' de la géodésique orientée $(y^- y^+)$ est (y^-, y^+, t) donc F est surjective et F' aussi.

Montrons que F' est continue. Soit $(\gamma_n)_{n\geq 1}$ une suite de G convergeant vers γ. On a $F'(\gamma_n) = (\gamma_n(0), \gamma_n(\infty), B_{\gamma_n(\infty)}(i, \gamma_n(i)))$. L'action de G sur $\mathbb{H} \cup \mathbb{H}(\infty)$ est continue donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \gamma_n(\infty) = \gamma(\infty)$. De même en 0. Par ailleurs $B_{\gamma_n(\infty)}(i, \gamma_n(i)) = B_\infty(\gamma_n^{-1}(i), i)$ et $|B_\infty(\gamma_n^{-1}(i), i) - B_\infty(\gamma^{-1}(i), i)| \leq d(\gamma_n^{-1}(i), \gamma^{-1}(i))$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} F'(\gamma_n) = F'(\gamma)$. Considérons à présent une suite $(A_n)_{n\geq 1} = ((x_n^-, x_n^+, t_n))_{n\geq 1}$ de $\mathbb{H}(\infty) \overset{\Delta}{\times} \mathbb{H}(\infty) \times \mathbb{R}$ convergeant vers $A = (x^-, x^+, t)$. Posons $\gamma_n = F'^{-1}(A_n)$ et $\gamma = F'^{-1}(A)$. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \gamma_n(x^\pm) = \gamma(x^\pm)$ pour $x = 0, \infty$, et $\lim\limits_{n\to+\infty} B_\infty(\gamma_n^{-1}(i), \gamma^{-1}(i)) = 0$. Posons $\gamma_n(z) = \frac{a_n z + b_n}{c_n z + d_n}$ et $\gamma(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, les limites précédentes deviennent $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{c_n} = \dfrac{a}{c}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{b_n}{d_n} = \dfrac{b}{d}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (c_n^2 + a_n^2) = c^2 + a^2$. Par conséquent, $\lim\limits_{n\to+\infty} \gamma_n = \gamma$ et F'^{-1} est continue. L'application F' est donc un homéomorphisme et $F = f^{-1} \circ F'$ aussi. $\square$

En utilisant les propriétés du cocycle de Busemann, on obtient que les actions de G et de $\tilde{g}_\mathbb{R}$ dans les nouvelles coordonnées sont conjuguées par F aux actions suivantes :

(R2) $\forall \gamma \in G$ $\gamma(u(-\infty), u(+\infty), t_u) = (\gamma(u(-\infty)), \gamma(u(+\infty)), t_u - B_{u(+\infty)}(i, \gamma^{-1}(i)))$.

(R3) $\forall s \in \mathbb{R}$ $\tilde{g}_s(u(-\infty), u(+\infty), t_u) = (u(-\infty), u(+\infty), t_u + s)$.

Soient $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite de $T^1\mathbb{H}$ et u un élément de $T^1\mathbb{H}$.

Lemme 1.2 *[clef] Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\underset{n\to+\infty}{lim} u_n(-\infty) = u(-\infty)$ *et* $\underset{n\to+\infty}{lim} u_n(+\infty) = u(+\infty)$.

(ii) *Il existe* $(s_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}$ *tel que* $\underset{n\to+\infty}{lim} \tilde{g}_{s_n}(u_n) = u$.

Démonstration

(ii)⇒(i) D'après la relation (R3) on a $F(\tilde{g}_s(u_n)) = (u_n(-\infty)u_n(+\infty), t_{u_n} + s_n)$. Puisque F est continu, $\underset{n\to+\infty}{lim} u_n(\pm\infty) = u(\pm\infty)$.

(i)⇒(ii) Posons $s_n = -t_{u_n} + t_u$. On a : $F(\tilde{g}_{s_n}(u_n)) = (u_n(-\infty), u_n(+\infty), t_u)$ donc $(F(\tilde{g}_{s_n}(u_n))_{n\geq 1}$ converge vers $F(u)$. L'application F étant un homéomorphisme, $\underset{n\to+\infty}{lim} \tilde{g}_{s_n}(u_n) = u$. □

A partir de maintenant nous fixons un groupe fuchsien Γ qui **n'est pas élémentaire**. Nous notons π la projection de $\mathbb{H}$ sur la surface $S = \Gamma\diagdown\mathbb{H}$ et π^1 celle de $T^1\mathbb{H}$ sur $T^1S = \Gamma\diagdown T^1\mathbb{H}$. Si Γ contient des éléments elliptiques, ce qui est le cas par exemple de $PSL(2,\mathbb{Z})$, la surface S n'est pas différentiable aux points images par π des points fixes de ces éléments. Malgré la notation un peu trompeuse, T^1S n'est donc pas toujours le fibré unitaire tangent de S. On munit S et T^1S de la topologie induite par π et π^1. La convergence d'une suite de S ou de T^1S se traduit sur $\mathbb{H}$ et $T^1\mathbb{H}$ de la façon suivante :

Lemme 1.3

(i) *Une suite* $(\pi(z_n))_{n\geq 1}$ *de* S *converge vers* $\pi(z)$ *si et seulement s'il existe une suite* $(\gamma_n)_{n\geq 1}$ *de* Γ *telle que* $(\gamma_n(z_n))_{n\geq 1}$ *converge vers* z.

(ii) *Une suite* $(\pi^1(u_n))_{n\geq 1}$ *de* T^1S *converge vers* $\pi^1(u)$ *si et seulement s'il existe une suite* $(\gamma_n)_{n\geq 1}$ *de* Γ *telle que* $(\gamma_n(u_n))_{n\geq 1}$ *converge vers* u.

On appelle **géodésique** de S, la projection sur S d'une géodésique de $\mathbb{H}$. On déduit de la relation (R_1) que l'application $\tilde{g}_t : T^1\mathbb{H} \longrightarrow T^1\mathbb{H}$ induit une application continue $g_t : T^1S \longrightarrow T^1S$ définie par $g_t(\pi^1(u)) = \pi^1(\tilde{g}_t(u))$ et donc une action continue, via les g_t, de $(\mathbb{R},+)$ sur T^1S. Le groupe $g_\mathbb{R}$ est appelé **flot géodésique** sur T^1S.

Nous nous intéressons dans les paragraphes suivants à la dynamique topologique du système $(T^1S, g_\mathbb{R})$. Nous utiliserons le vocabulaire introduit au tout début de ce chapitre.

2 Lecture à l'infini des semi-orbites de $g_\mathbb{R}$.

Soit $u \in T^1\mathbb{H}$, le but de ce paragraphe est de lire le comportement topologique de $g_\mathbb{R}(\pi^1(u))$ en fonction de la façon dont $u(-\infty)$ et $u(+\infty)$ sont approchés par $\Gamma(i)$. Pour cela, commençons par introduire l'ensemble suivant :

$$\widetilde{\Omega}_g(T^1S) = \{u \in T^1\mathbb{H}/u(-\infty) \in L(\Gamma), u(+\infty) \in L(\Gamma)\}$$

L'ensemble $L(\Gamma)$ étant fermé et invariant par Γ, il en est de même pour $\widetilde{\Omega}_g(T^1S)$. Remarquons également que $\widetilde{\Omega}_g(T^1S)$ est invariant par $\tilde{g}_{\mathbb{R}}$.

Théorème 2.1 *Soit u dans $T^1\mathbb{H}$. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) $\pi^1(u)$ *n'est pas errant.*

(ii) u *appartient à* $\widetilde{\Omega}_g(T^1S)$.

Avant de démontrer ce théorème démontrons le lemme suivant.

Lemme 2.2 *Soient x,y des points de $L(\Gamma)$, il existe une suite $(\gamma_n)_{n\geq 1}$ de Γ telle* $\underset{n\to+\infty}{lim}\gamma_n(i) = x$ *et* $\underset{n\to+\infty}{lim}\gamma_n^{-1}(i) = y$

Démonstration

Fixons x dans $L(\Gamma)$ et notons A, l'ensemble des x' dans $L(\Gamma)$ pour lesquels il existe une suite $(h_n)_{n\geq 1}$ de Γ vérifiant $\underset{n\to+\infty}{lim} h_n(i) = x$ et $\underset{n\to+\infty}{lim} h_n^{-1}(i) = x'$. Cet ensemble n'est pas vide et est invariant par Γ, montrons qu'il est fermé. Soit $(x'_p)_{p\geq 1}$ une suite de A convergeant vers un point x' de $\mathbb{H}(\infty)$. Considérons une suite décroissante $(V_n)_{n\geq 1}$ de voisinage ouverts de x' dans $\mathbb{H}\cup\mathbb{H}(\infty)$ telle que : $\overset{+\infty}{\underset{n=1}{\cap}} V_n = \{x'\}$. Pour tout n, il existe x_{p_n} dans V_n et une suite $(h_{n,k})_{k\geq 1}$ de Γ telle que $\underset{k\to+\infty}{lim} h_{n,k}(i) = x$ et $\underset{k\to+\infty}{lim} h_{n,k}^{-1}(i) = x_{p_n}$. Par conséquent, il existe une suite $(h_{n,k_n})_{n\geq 1}$ telle que $h_{n,k_n}^{-1}(i)$ appartienne à V_n et $\underset{n\to+\infty}{lim} h_{n,k_n}(i) = x$. Ceci entraîne que x' appartient à A et donc que A est fermé. Par ailleurs A est inclus dans $L(\Gamma)$ et $L(\Gamma)$ est minimal, puisque Γ n'est pas élémentaire, donc $A = L(\Gamma)$. $\square$

Démonstration du théorème 2.1

(ii) $\Rightarrow$ (i) Soit $(\gamma_n)_{n\geq 1}$ une suite de Γ telle que $\underset{n\to+\infty}{lim}\gamma_n(i) = u(+\infty)$ et $\underset{n\to+\infty}{lim}\gamma_n^{-1}(i) = u(-\infty)$. Posons $t_n = d(u(0),\gamma_n^{-1}(u(0)))$, pour n grand, t_n n'est pas nul. Considérons l'élément de contact v_n en $\gamma_n^{-1}(u(0))$ associé au segment orienté $[\gamma_n^{-1}(u(0)),u(0)]$.

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n(-\infty) = u(-\infty)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n(+\infty) = u(+\infty)$. Par ailleurs $v_n(t_n) = u(0)$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \tilde{g}_{t_n}(v_n) = u$. Considérons maintenant $\gamma_n(v_n)$. Cet élément est l'élément de contact en $u(0)$ associé au rayon géodésique orienté $[u(0),\gamma_n(u(0))]$. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \gamma_n(v_n) = u$. Soit V un voisinage de $\pi^1(u)$, pour n grand, $\pi^1(v_n)$ et $g_{t_n}(\pi^1(v_n))$ appartiennent à V donc : $g_{t_n}V \cap V \neq \phi$. Ceci montre que $\pi^1(u)$ n'est pas errant.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Soit $(V_n)_{n\geq 1}$ une suite décroissante de voisinages de $\pi^1(u)$ telle que : $\bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} V_n = \{\pi^1(u)\}$. Comme $\pi^1(u)$ n'est pas errant, il existe une suite $t_n \to +\infty$ telle que : $g_{t_n}V_n \cap V_n \neq \phi$. On déduit de cette remarque l'existence d'une suite $(\pi^1(u_n))_{n\geq 1}$ de T^1S vérifiant : $\lim\limits_{n\to+\infty} \pi^1(u_n) = \pi^1(u)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} g_{t_n}\pi^1(u_n) = \pi^1(u)$. Quitte à remplacer u_n par un élément de $\Gamma(u_n)$, il existe donc une suite $(\gamma_n)_{n\geq 1}$ de Γ vérifiant : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = u$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \gamma_n\tilde{g}_{t_n}(v_n) = u$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = +\infty$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(t_n) = u(+\infty)$. Par ailleurs $\lim\limits_{n\to+\infty} d(u_n(t_n),\gamma_n^{-1} u(0)) = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \gamma_n^{-1}(i) = u(+\infty)$. Ceci montre que $u(+\infty)$ appartient à $L(\Gamma)$. En remplaçant dans le raisonnement précédent $(t_n)_{n\geq 1}$ par $(-t_n)_{n\geq 1}$, on obtient que $u(-\infty)$ appartient à $L(\Gamma)$. □

L'ensemble $\pi^1(\widetilde{\Omega}_g(T^1S))$ est donc l'ensemble non errant du flot géodésique sur T^1S, comme convenu au début de ce chapitre, nous le notons $\Omega_g(T^1S)$. Remarquons que si Γ est un réseau, $L(\Gamma) = \mathbb{H}(\infty)$ et donc $\Omega_g(T^1S) = T^1S$. En revanche si Γ est un groupe de Schottky, $\Omega_g(T^1S) \neq T^1S$.
Etudions plus finement la dynamique de $g_{\mathbb{R}}$ et pour commencer, celle des semi-flots $g_{\mathbb{R}^+}$,$g_{\mathbb{R}^-}$. Soit u un élément de $T^1\mathbb{H}$, notons $-u$ l'élément de $T^1\mathbb{H}$ défini par : $-u(0) = u(0)$ et $\overrightarrow{-u} = -\vec{u}$. L'application de $T^1\mathbb{H}$ dans lui-même qui à u associe $-u$ est continue et vérifie $-\tilde{g}_t(-u) = \tilde{g}_{-t}(u)$. Les semi-flots $g_{\mathbb{R}^+}$ et $g_{\mathbb{R}^-}$ sont donc conjugués.

Proposition 2.3 *Soit u dans $T^1\mathbb{H}$. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) $\pi^1(u)$ *est positivement (resp. négativement) convergent.*

(ii) $u(+\infty)$ *(resp. $u(-\infty)$) est un point conique de $L(\Gamma)$*

Démonstration

(i) $\Rightarrow$ (ii) Soit $(t_n)_{n\geq 1}$ une suite non bornée de $\mathbb{R}^+$, telle que $(g_{t_n}(\pi^1(u)))_{n\geq 1}$ converge. Sur $T^1\mathbb{H}$, cette convergence se traduit par l'existence d'une suite $(\gamma_n)_{n\geq 1}$ de Γ telle que $(\gamma_n\tilde{g}_{t_n}(u))_{n\geq 1}$ converge vers un élément u' de $T^1\mathbb{H}$. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(t_n) = u(+\infty)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} d(u_n(t_n),\gamma_n^{-1}(u'(0))) = 0$. Les points $u(t_n)$ appartiennent au rayon $[u(0),u(+\infty))$, de plus $d(\gamma_n^{-1}(u(0),\gamma_n^{-1}(u'(0))) = d(u(0),u'(0))$ donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N > 0$, tel que : $d(\gamma_n^{-1}(u(0)),[u(0),$

$u(+\infty))) < \varepsilon$ quelque soit $n \geq N$. Ceci montre que $u(+\infty)$ est conique.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Soit $(\gamma_n)_{n\geq 1}$ dans Γ telle que $d(\gamma_n(u(0)),[u(0),u(+\infty))) < \varepsilon$. Il existe donc $s_n > 0$ vérifiant : $d(\gamma_n(u(0)),u(s_n) < \varepsilon$. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que la suite $(\gamma_n^{-1}\tilde{g}_{s_n}(u))_{n\geq 1}$ converge, ce qui entraîne la convergence de la suite $(g_{s_n}(\pi^1(u)))_{n\geq 1}$. $\square$

On déduit de cette proposition et du fait que $L_p(\Gamma)$ et $L_c(\Gamma)$ sont disjoints que si $u(-\infty)$ et $u(+\infty)$ sont paraboliques, $\pi^1(u)$ est positivement et négativement divergent.

Supposons à présent que Γ soit **géométriquement fini** et non élémentaire. On rappelle (voir chapitre I) que $\widetilde{\Omega}(\Gamma)$ est la projection sur $\mathbb{H}$ de $\widetilde{\Omega}_g(T^1S)$. Fixons un domaine de Dirichlet, $D_z(\Gamma)$, et notons, $\widetilde{\mathcal{D}}$ l'intersection de $D_z(\Gamma)$ avec la région de Nielsen de Γ. Si l'intersection de l'adhérence de $\widetilde{\mathcal{D}}$ avec $\mathbb{H}(\infty)$ n'est pas vide, elle est constituée d'un nombre fini de points $x_1,\cdots,x_n$ qui sont tous paraboliques (voir §I-4). Fixons des horodisques $(H^+(x_i))_{1\leq i\leq n}$ basés en x_i, deux à deux disjoints tels que $\gamma H^+(x_i)\cap H^+(x_i) = \phi$ pour tout $\gamma \in \Gamma - \Gamma_{x_i}$. D'après la proposition I.4.5, l'ensemble $\widetilde{D} - \bigcup_{i=1}^{n} \widetilde{D}\cap H^+(x_i)$ est borné, notons $\widetilde{K}$ son adhérence. Soit u dans $\widetilde{\Omega}_g(T^1S)$ tel que $u(+\infty)$ soit conique, montrons qu'il existe une suite $(t_n)_{n\geq 1}$ non bornée de $\mathbb{R}^+$ telle que $\pi(u(t_n))$ appartienne à $\pi(K)$. Si ce n'est pas le cas, il existe $T > 0$ tel que $\pi(u(t))$ appartienne à la réunion des cuspides $\bigcup_{i=1}^{n} C(x_i)$ pour $t \geq T$. Les cuspides $C(x_i)$ étant disjointes, $\pi([u(T),u(+\infty)))$ est inclus dans une seule cuspide $C(x_i)$. Le rayon $[u(T),u(+\infty))$ est donc inclus dans un horodisque $\gamma(H^+(x_i)$ et $u(+\infty) = \gamma(x_i)$, ce qui contredit le fait que $u(+\infty)$ soit conique. Il existe donc un compact $K' \subset T^1S$ tel que pour tout u dans $\widetilde{\Omega}_g(T^1S)$ vérifiant $u(+\infty) \in L_c(\Gamma)$, la trajectoire de $\pi^1(u)$ par $g_{\mathbb{R}^+}$ rencontre K' en des temps non bornés. Plus généralement on a la dynamique suivante :

Proposition 2.4 *Soit Γ un groupe géométriquement fini et non élémentaire. Soit u dans $T^1\mathbb{H}$*

(i) Il existe un compact K inclus dans T^1S tel que si $u(+\infty)$ est conique (resp. $u(-\infty)$), l'ensemble des $t > 0$ (resp. $t < 0$) tels que $g_t(\pi^1(u))$ appartienne à K n'est pas borné.

(ii) Si $u(+\infty)$ (resp. $u(-\infty)$) est parabolique, il existe $T > 0$ tel que $g_t(\pi^1(u))$ soit inclus dans le relevé à T^1S d'une cuspide de S, pour tout $t \geq T$ (resp. $t \leq T$). De plus $g_{[t,+\infty)}(\pi^1(u))$ (resp. $g_{(-\infty),-T]}(\pi^1(u))$ est homéomorphe à $\tilde{g}_{[T,+\infty)}(u)$ (resp. $\tilde{g}_{(-\infty,-T)}(u)$).

Démonstration

(i) Nous savons déjà que la propriété (i) est satisfaite pour les $\pi^1(u)$ appartenant à $\Omega_g(T^1S)$ dont l'extrémité positive $u(+\infty)$ est conique.

Considérons un compact K' relatif à cet ensemble. Fixons $\varepsilon > 0$. Soient v dans $T^1\mathbb{H}$ tel que $v(+\infty)$ soit conique et u dans $\widetilde{\Omega}_g(T^1S)$ tel que $u(+\infty) = v(+\infty)$. Les rayons géodésiques $[v(0),v(+\infty))$ et $[u(0),u(+\infty))$ sont asymptotes, donc il existe $T > 0$ tel que $[v(T),v(+\infty))$ soit dans le ε-voisinage de $[u(0),u(+\infty))$. Par ailleurs, il existe une suite non bornée $(t_n)_{n\geq 1}$ dans $\mathbb{R}^+$ telle que la suite $(g_{t_n}(\pi^1(u)))_{n\geq 1}$ soit incluse dans K'. On déduit de ces deux propriétés l'existence de $(t'_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}^+$ non bornée telle que $(\pi(v(t_n)))_{n\geq 1}$ soit inclus dans le ε-voisinage de K'. Un tel voisinage est compact.

(ii) Pour ne pas alourdir les notations, nous raisonnons sur S et non sur T^1S. On a $C(u(+\infty) = q(\Gamma_{u(+\infty)} \backslash H^+(u(+\infty))$. Pour T grand, le rayon $[u(T),u(+\infty))$ est inclus dans $H^+(u(+\infty))$, donc $\pi([u(T),u(+\infty)))$ est inclus dans $C(u(+\infty))$. Par ailleurs q et la projection de $[u(T),u(+\infty))$ sur $\Gamma_{u(+\infty)} \backslash H^+(u(+\infty))$ sont injectives donc $[u(\Gamma),u(+\infty))$ et $\pi([u(T),u(+\infty)))$ sont homéomorphes. $\square$

Notons E_i l'ensemble des u dans $T^1\mathbb{H}$ tels que $u(0)$ appartienne à l'horocycle $H(x_i)$. Soit v un élément de $T^1\mathbb{H}$ dont l'extrémité positive, $v(+\infty)$, est parabolique. Il existe $1 \leq i \leq n$ et γ dans Γ tels que $\gamma(v(+\infty)) = x_i$. Une géodésique d'extrémité x_i rencontre $H(x_i)$ donc : $\gamma\tilde{g}_{\mathbb{R}}(v) \cap E_i \neq \phi$. Par conséquent, la réunion du compact K donné par la propriété (i) précédente et de la projection sur T^1S des E_i est un compact rencontré par toutes les trajectoires de $g_{\mathbb{R}}$ en restriction à $\Omega_g(T^1S)$. On peut donc énoncer le résultat suivant :

Corollaire 2.5 *Soit Γ un groupe géométriquement fini et non élémentaire. Il existe un compact K inclus dans $\Omega_g(T^1S)$ rencontré par toutes les orbites de $g_{\mathbb{R}}$ en restriction à $\Omega_g(T^1S)$.*

Si $\Omega_g(T^1S)$ est compact d'après la proposition 2.3 : $L(\Gamma) = L_c(\Gamma)$. Réciproquement si $L(\Gamma) = L_c(\Gamma)$, ce qui est par exemple le cas d'un groupe de Schottky engendré par deux isométries hyperboliques, alors d'après la proposition I-4-5, l'ensemble $\widetilde{\Omega}(\Gamma) \cap D_z(\Gamma)$ est borné et donc $\Omega_g(T^1S)$ est compact. On peut donc énoncer la propriété suivante.

Propriété 2.6 *L'ensemble $\Omega_g(T^1S)$ est compact si et seulement si $L(\Gamma) = L_c(\Gamma)$.*

3 Orbites périodiques de $g_{\mathbb{R}}$ et périodes.

Commençons par établir un lien entre les isométries hyperboliques et le flot $\tilde{g}_{\mathbb{R}}$.

Lemme 3.1 *Soient u dans $T^1\mathbb{H}$ et γ dans G, les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) Il existe $T > 0$ tel que $\tilde{g}_T(u) = \gamma(u)$.

(ii) L'isométrie γ est hyperbolique et $u(+\infty) = \gamma^+, u(-\infty) = \gamma^-$.

Démonstration

(ii) $\Rightarrow$ (i) L'isométrie γ laisse invariante la géodésique orientée $(\gamma^-\gamma^+)$ et pour tout z sur cette géodésique $d(z,\gamma(z)) = \ell(\gamma)$ donc $\gamma(u) = \tilde{g}_{\ell(\gamma)}(u)$.

(i) $\Rightarrow$ (ii) On a $\underset{n\to\pm\infty}{lim}\ \tilde{g}_{nT}(u)(0) = u(\pm\infty)$, or $\tilde{g}_{nT}(u) = \gamma^n(u)$ donc γ fixe $u(+\infty)$ et $u(-\infty)$. Ces deux points sont différents et γ est différent de l'identité donc cette isométrie est hyperbolique. □

Soit u dans $T^1\mathbb{H}$, supposons que $\pi^1(u)$ soit périodique, par définition, il existe $T > 0$ tel que $g_T(\pi^1(u)) = \pi^1(u)$. Considérons l'application continue $F : \mathbb{R} \longrightarrow g_{\mathbb{R}}(\pi^1(u))$ qui à t associe $g_t(\pi^1(u))$. Comme $g_{\mathbb{R}}(\pi^1(u))$ est compact et T appartient $F^{-1}(\pi^1(u))$, le sous-groupe $F^{-1}(\pi^1(u))$ est un groupe fermé non trivial différent de $\mathbb{R}$. La **période T_u de** $\pi^1(u)$ est par définition le plus petit élément strictement positif de ce groupe. D'après le lemme précédent, il existe γ dans Γ hyperbolique tel que $\tilde{g}_{T_u}(u) = \gamma(u)$. Remarquons que $T_u = \ell(\gamma)$. Par ailleurs γ est **primitif**, au sens où il n'existe pas de h dans Γ et $n > 1$ tels que $\gamma = h^n$. En effet, sinon on aurait $\tilde{g}_{\ell(h)}(u) = h(u)$ et donc $\ell(\gamma) = n\ell(h)$ ne serait pas la période.

Notons Hyp (Γ) l'ensemble des classes de conjugaison dans Γ des isométries hyperboliques primitive de Γ. L'application de Hyp (Γ) sur l'ensemble des trajectoires périodiques de $g_{\mathbb{R}}$, qui à une classe $[\gamma]$ associe la trajectoire $g_{\mathbb{R}}(\pi^1(u))$, où u est un élément de $T^1\mathbb{H}$ vérifiant : $u(+\infty) = \gamma^+$ et $u(-\infty) = \gamma^-$, est une bijection.

Lemme 3.2 *Soit u dans $T^1\mathbb{H}$. L'élément $\pi^1(u)$ est périodique si et seulement si $g_{\mathbb{R}}(\pi^1(u))$ est compact.*

Démonstration

Si $\pi^1(u)$ est périodique, on a $g_{\mathbb{R}}(\pi^1(u)) = g_{[0,T_u]}(\pi^1(u))$, donc l'orbite est compacte.

Réciproquement supposons $g_{\mathbb{R}}(\pi^1(u))$ compact. Recouvrons la géodésique $(u(-\infty)u(+\infty))$ par une suite de segments ouverts $(S_i =]u(t_i), u(t_i+1)[)_{i\in\mathbb{Z}}$ avec $(t_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ strictement croissant. Puisque $\pi(u(\mathbb{R}))$ est compact, il existe une sous-suite finie $(\pi(S_i))_{i\in I}$ recouvrant $(u(-\infty)u(+\infty))$. Soit j dans $\mathbb{Z} - I$, $\pi(S_j)$ est inclus dans $\underset{i\in I}{\cup}\pi(S_i)$. Pour tout z dans S_j, il existe $\gamma \in \Gamma - \{Id\}$ tel que $\gamma(z)$ appartienne à $\underset{i\in I}{\cup} S_i$. Le groupe Γ étant discret, il existe $t_j \leq s_1 < s_2 \leq t_j + 1$, $\gamma \in \Gamma - \{Id\}$ et $i \in I$ tels que $\gamma([u(s_1), u(s_2)])$ soit inclus dans S_i. Par conséquent, $\gamma(\tilde{g}_{s_1}(u))$ est de la forme $\tilde{g}_s(u)$ avec s dans $[t_i, t_i+1]$, donc $\pi^1(u)$ est périodique. □

Le groupe Γ n'étant pas élémentaire, Hyp(Γ) est infini et donc T^1S contient une infinité d'orbites périodiques.

Théorème 3.3 *L'ensemble des éléments périodiques est dense dans* $\Omega_g(T^1S)$.

Démonstration

Fixons u dans $\widetilde{\Omega}_g(T^1S)$. Démontrer le théorème revient, d'après le lemme 1.2, à démontrer qu'il existe une suite d'isométries hyperboliques $(\gamma_n)_{n\geq 1}$ de Γ, telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \gamma_n^+ = u(+\infty)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \gamma_n^- = u(-\infty)$. D'après le lemme 2.2, il existe $(\gamma_n)_{n\geq 1}$ dans Γ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} \gamma_n(i) = u(+\infty)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \gamma_n^{-1}(i) = u(-\infty)$. Plaçons-nous dans le modèle du disque de Poincaré. Quitte à conjuguer Γ, on peut supposer que ce groupe ne contient pas d'élément elliptique fixant 0. Le domaine de Dirichlet $D_0(\Gamma) = (\bigcap\limits_{\gamma\in\Gamma-\{Id\}} D(\gamma)) \cap \mathbb{D}$ est localement fini. Par conséquent, les suites des diamètres euclidiens de $D(\gamma_n)_{n\geq 1}$ et de $D(\gamma_n^{-1})_{n\geq 1}$ convergent vers 0. Par ailleurs $\gamma_n(0)$ appartient à $D(\gamma_n)$,$\gamma_n^{-1}(0)$ appartient $D(\gamma_n^{-1})$ et $u(+\infty) \neq u(-\infty)$, donc pour n grand, $D(\gamma_n) \cap D(\gamma_n^{-1}) = \phi$. Ceci entraîne que γ_n est hyperbolique. Par ailleurs γ_n^+ appartient à $D(\gamma_n)$ et γ_n^- appartient à $D(\gamma_n^{-1})$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \gamma_n^+ = u(+\infty)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \gamma_n^- = u(-\infty)$. $\square$

Le lemme suivant, connu sous le nom de **lemme de fermeture**, montre qu'une trajectoire revenant assez proche d'elle même est pistée par une trajectoire périodique.

Lemme 3.4 *Soit K un compact de $\Omega_g(T^1S)$. Quelque soit $\varepsilon > 0$, il existe $N > 0$ tels que pour tous v dans K et $t > N$ vérifiant $D(g_t(v),v) \leq \frac{1}{N}$, il existe t' dans $]t-\varepsilon, t+\varepsilon[$ et v' dans la boule de centre v et de rayon ε, tels que $g_{t'}(v') = v'$.*

Démonstration

Raisonnons par l'absurde. Supposons l'existence de $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $k \geq 1$, il existe v_k dans K et $t_k > k$ vérifiant : $D(g_{t_k}(v_k),v_k) \leq \frac{1}{k}$ et, pour tous $t' \in]t_k - \varepsilon, t_k + \varepsilon[$ et v' dans la boule de centre v_k et de rayon ε : $g_{t'}(v') \neq v'$. On peut supposer que $(v_k)_{k\geq 1}$ converge vers v. Relevons cette suite en une suite $(\tilde{v}_k)_{k\geq 1}$ de $T^1\mathbb{H}$ convergeant vers $\tilde{v}$. Soit γ_k dans Γ tel que $D(\gamma_k \tilde{g}_{t_k}(\tilde{v}_k),\tilde{v}_k) \leq \frac{1}{k}$. On a $\lim\limits_{k\to+\infty} \tilde{v}_k(t_k) = \tilde{v}(+\infty)$ et $\lim\limits_{k\to+\infty} d(v_k(t_k),\gamma_k^{-1}(\tilde{v}_k(0)) = 0$ donc $\lim\limits_{k\to+\infty} \gamma_k^{-1}(\tilde{v}(0)) = \tilde{v}(+\infty)$. Posons $\tilde{w}_k = \gamma_k \tilde{g}_{t_k}(\tilde{v}_k)$, on a $D(\tilde{w}_k,\gamma_k^{-1}\tilde{g}_{-t_k}(\tilde{w}_k)) \leq \frac{1}{k}$, $\lim\limits_{k\to+\infty} \tilde{w}_k = \tilde{w}$ et $\lim\limits_{k\to+\infty} \tilde{w}_k(-t_k) = \tilde{w}(-\infty)$ donc $\lim\limits_{k\to+\infty} \gamma_k(\tilde{v}(0)) = \tilde{v}(-\infty)$. En reprenant le même raisonnement que celui utilisé à la fin de la démonstration du théorème 3.3, on obtient que γ_k est hyperbolique pour k grand et que : $\lim\limits_{k\to+\infty} \gamma_k^+ = \tilde{v}(+\infty)$,

$\lim\limits_{k\to+\infty} \gamma_k^- = \tilde v(-\infty)$. Soit $(\tilde u_k)_{k\geq 1}$ une suite de $\widetilde{\Omega}_g(T^1S)$ telle que : $\tilde u_k(+\infty) = \gamma_k^+, \tilde u_k(-\infty) = \gamma_k^-$ et $\lim\limits_{k\to+\infty} \tilde v_k = \tilde v$. Comme $\ell(\gamma_k) = d(\tilde u_k(0),\gamma_k \tilde u_k(0))$, on a $\lim\limits_{k\to+\infty} (\ell(\gamma_k) - d(\tilde v(0),\gamma_k^{-1}\tilde v(0)) = 0$. Par ailleurs $\lim\limits_{k\to+\infty} d(\tilde g_{t_k}(\tilde v_k)(0),\gamma_k^{-1}(\tilde v_k(0))) = 0$ et $t_k = d(\tilde v_k(0),\tilde v_k(t_k))$ donc $\lim\limits_{k\to+\infty} |t_k - d(\tilde v_k(0),\gamma_k^{-1}\tilde v_k(0))| = 0$. On en conclut : $\lim\limits_{k\to+\infty} |t_k - \ell(\gamma_k)| = 0$, $\lim\limits_{k\to+\infty} \pi^1(\tilde u_k) = v$ et $g_{\ell(\gamma_k)}(\pi^1(\tilde u_k)) = \pi^1(\tilde u_k)$, ce qui est contraire à l'hypothèse. $\square$

Intéressons nous à présent aux périodes des orbites périodiques de $g_{\mathbb{R}}$. Posons $Sp(g_{\mathbb{R}}) = \{T_u/\pi^1(u) \text{ périodique}\}$. On sait que T appartient à $Sp(g_{\mathbb{R}})$ si et seulement s'il existe γ dans Γ, hyperbolique et primitif, tel que : $T = \ell(\gamma)$. L'ensemble $\{nT/n \in \mathbb{N}, T \in Sp(g_{\mathbb{R}})\}$ coïncide donc avec l'ensemble $\mathcal{L}(\Gamma) = \{\ell(\gamma)/\gamma \in \Gamma\}$. Analysons la nature topologique du **spectre des longueurs** $\mathcal{L}(\Gamma)$.

Propriété 3.5 *Soit Γ un groupe géométriquement fini. Si $(\ell(\gamma_n))_{n\geq 1}$ est une suite convergente de $\mathcal{L}(\Gamma)$, il existe $N > 1$ tel que pour tout $n \geq N$, l'isométrie γ_n soit conjuguée dans Γ à γ_N ou γ_N^{-1}.*

Démonstration

Soit u_n dans $T^1\mathbb{H}$ tel que $u_n(+\infty) = \gamma_n^+$ et $u_n(-\infty) = \gamma_n^-$. Le groupe Γ étant géométriquement fini, d'après le corollaire 2.5, il existe un compact de T^1S rencontré par toutes les trajectoires $g_{\mathbb{R}}(\pi^1(u_n))$. Par conséquent, quitte à remplacer γ_n par un de ses conjugués par Γ, u_n par un élément de $\tilde g_{\mathbb{R}}(u_n)$ et quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge vers v. On a $d(\gamma_n(u_n(0)),u_n(0)) = \ell(\gamma_n)$. Par ailleurs $(\ell(\gamma_n))_{n\geq 1}$ converge et $(u_n(0))_{n\geq 1}$ converge vers $u(0)$ donc il existe $\varepsilon > 0$ et $M > 0$ tels que : $d(\gamma_n(u(0)),u(0)) \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq M$. Le groupe Γ étant discret, la suite $(\gamma_n)_{n\geq M}$ est constante à partir d'un certain rang. $\square$

En termes de périodes du flot géodésique, la propriété précédente entraîne que si une suite $(T_{u_n})_{n\geq 1}$ de $Sp(g_{\mathbb{R}})$ converge, les éléments $\pi^1(u_n)$ appartiennent à une même trajectoire $g_{\mathbb{R}}(\pi^1(u))$ à partir d'un certain rang.

L'hypothèse de finitude géométrique joue un rôle essentiel dans la propriété ci-dessus.

En effet, considérons une isométrie hyperbolique h de G dont les ensembles $D(h),D(h^{-1})$, lus dans $\mathbb{H}$, soient deux demi-disques. Soit $(n_k)_{k\geq 1}$ une suite de $\mathbb{N}$ telle que pour tout $k \geq 1$ et $\varepsilon = \pm 1$, les demi-disques $t^{n_k}(D(h^\varepsilon))$, avec $t(z) = z + 1$, soient deux à deux disjoints. En appliquant le lemme II.1.2 étendu à plusieurs transformations hyperboliques, on obtient que pour tout $\gamma \neq Id$ appartenant au groupe H engendré par les $\gamma_k = t^{n_k} h t^{-n_k}$, et pour tout z n'appartenant pas à $\bigcup\limits_{\substack{k\geq 1\\ \varepsilon=\pm 1}} t^{n_k}(D(h^\varepsilon))$, le point $\gamma_k(z)$ appartient à $\bigcup\limits_{\substack{k\geq 1\\ \varepsilon=\pm 1}} t^{n_k}(D(h^{\varepsilon}))$. On déduit de cette dynamique du Ping-Pong que H est libre et discret. Les isométrie $(\gamma_k)_{k\geq 1}$ ne sont pas conjuguées entre elles dans H et pourtant $\ell(\gamma_k)=\ell(h)$ pour tout $k\geq 1$.

On rappelle que Γ n'est pas élémentaire.

Propriété 3.6 *Le groupe additif engendré par $\mathcal{L}(\Gamma)$ (et donc par $Sp(g_{\mathbb{R}})$) est dense dans $\mathbb{R}$.*

Démonstration

Le groupe Γ n'étant pas élémentaire, il contient un groupe de Schottky engendré par deux isométries hyperboliques h et g. Plaçons-nous dans le modèle du disque. On peut toujours supposer que $D(h)$,$D(h^{-1})$,$D(g)$,$D(g^{-1})$ sont placés de la façon suivante :

Pour tout $n>0$ les géodésique (h^-h^+) et $((gh^n)^-(gh^n)^+)$ se coupent un point z_n de $\mathbb{D}$. La suite $(z_n)_{n\geq 1}$ converge vers h^-. On peut donc supposer que les points z_n sont tous différents. On a $\ell(gh^n)=d(z_n,gh^n(z_n))$ et $\ell(h)=d(z_n,h(z_n))$. Par ailleurs z_n n'appartient pas à l'axe de gh^{n+1} donc $\ell(gh^{n+1})<d(z_n,gh^{n+1}(z_n))$. Par conséquent, pour tout $n\geq 1$:

$$(*)\ell(gh^{n+1})<\ell(gh^n)+\ell(h).$$

Soit $\gamma(z)=\frac{az+b}{cz+d}$, un élément de G, on a $ch\frac{1}{2}\ell(\gamma)=\frac{|a+d|}{2}$. En utilisant cette relation et en supposant, quitte à conjuguer Γ, que $h(z)=\lambda z$ avec $\lambda>1$, on obtient : $\lim_{n\to+\infty} \ell(gh^{n+1}) - \ell(gh^n) = \ell(h)$. Si $\mathcal{L}(\Gamma)$ engendre un groupe discret alors $\ell(gh^{n+1}) - \ell(gh^n) = \ell(h)$ à partir d'un certain rang, ce qui contredit l'égalité (*) $\square$

Remarquons que l'hypothèse de non élémentarité est essentielle puisque si Γ est un groupe cyclique engendré par une isométrie hyperbolique h alors $\mathcal{L}(\Gamma) = \mathbb{Z}\ell(h)$.

Soient Γ_1 et Γ_2 deux groupes fuchsiens **isospectraux**, c'est à dire pour lesquels il existe un isomorphisme $\rho : \Gamma_1 \longrightarrow \Gamma_2$ vérifiant $\ell(\gamma) = \rho(\ell(\gamma))$ pour tout $\gamma \in \Gamma_1$. C'est le cas si ρ est une conjugaison par un élément de G, dans ce cas ρ est la restriction à Γ_1 d'un automorphisme de G. La proposition suivante montre que ce phénomène est général et donc que Γ_1, modulo les automorphismes continus de G, est déterminé par son **spectre marqué des longueurs**. $(\ell(\gamma))_{\gamma\in\Gamma_1}$

Proposition 3.7 *Soient Γ_1 et Γ_2 deux groupes fuchsiens non élémentaires. Si ρ est un isomorphisme isospectral entre Γ_1 et Γ_2 alors ρ est la restriction à Γ_1 d'un automorphisme continu de G.*

Démonstration

Soient Γ le groupe de $G \times G$ défini par $\Gamma = \{(\gamma,\ell(\gamma))/\gamma \in \Gamma_1\}$ et H la composante connexe de son adhérence de Zariski. L'application $q : G\times G \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $q(g_1,g_2) = (\text{trace } (g_1))^2 - (\text{trace } (g_2))^2$ s'annule sur H donc $H \neq G \times G$. Notons p_1 (resp. p_2) la projection de h sur le premier (resp. deuxième) facteur de $G \times G$. Ces projections sont surjectives car un sous-groupe de Lie connexe propre de G est de dimension 0,1 ou 2 et ne contient donc pas de sous-groupe libre. De plus elles sont injectives car leur noyau est un sous-groupe de Lie de G normalisé par G, différent de G. On en déduit que p_1 et p_2 sont des automorphismes continus de G. Posons $f = p_2 \circ p_1^{-1}$, on a $H = \{(\gamma,f(\gamma))/\gamma \in G\}$. Soit $\gamma_1 \in \Gamma_1$, comme H est normalisé par Γ : $\rho(\gamma_1)f(g)\rho(\gamma_1)^{-1} = f(\gamma_1)f(g)f(\gamma_1)^{-1}$ pour tout $g \in G$ donc $\rho(\gamma_1) = f(\gamma_1)$. Ceci montre que ρ s'étend en un automorphisme continu de G. $\square$

4 Orbites denses.

Le but de ce paragraphe est démontrer l'existence d'orbite dense pour l'action de $g_{\mathbb{R}}$ en restriction à $\Omega_g(T^1S)$. Pour cela nous allons raisonner sur les propriétés de l'action de Γ sur $L(\Gamma) \overset{\Delta}{\times} L(\Gamma)$. En effet d'après le lemme 1.2, chercher une orbite dense pour l'action de $g_{\mathbb{R}}$ sur $\Omega_g(T^1S)$ revient à chercher un couple de $L(\Gamma) \overset{\Delta}{\times} L(\Gamma)$ dont l'orbite sous Γ est dense dans $L(\Gamma) \overset{\Delta}{\times} L(\Gamma)$.

Commençons par démontrer le lemme suivant.

Lemme 4.1 Soit Γ un groupe fuchsien non élémentaire. Quelque soient les ouverts O et V de $L(\Gamma) \overset{\Delta}{\times} L(\Gamma)$, il existe $\gamma \in \Gamma$ tel que $\gamma(O) \cap V \neq \phi$.

Démonstration

On peut supposer que O et V sont des produits d'ouverts : $O = O_1 \times O_2$, $V = V_1 \times V_2$. L'ensemble $L(\Gamma)$ étant minimal, V_1 contient le point fixe atractif γ^+ d'une isométrie hyperbolique γ de Γ. Pour n assez grand, $\gamma^n O_1 \cap V_1 \neq \phi$. Par ailleurs d'après le théorème 3.3, il existe une isométrie hyperbolique h de Γ telle que h^- appartienne à $\gamma^n O_1 \cap V_1$ et h^+ appartienne à V_2, ainsi pour k assez grand, $h^k\gamma^n(O_2) \cap V_2 \neq \phi$. Par ailleurs h^- appartient à $\gamma^n O_1 \cap V_1$ donc $h^k\gamma^n(O_1) \cap V_1 \neq \phi$. En conclusion, $h^k\gamma^n O \cap V \neq \phi$. $\square$

On déduit de ce lemme, le corollaire suivant :

Corollaire 4.2 *Il existe u dans $\widetilde{\Omega}_g(T^1S)$ tel que $\overline{g_{\mathbb{R}}(\pi^1(u))} = \Omega_g(T^1S)$.*

Démonstration

Considérons une partition dénombrable d'ouverts $(O_n)_{n\geq 1}$ de $L(\Gamma) \overset{\Delta}{\times} L(\Gamma)$ telle que tout ouvert de $L(\Gamma) \overset{\Delta}{\times} L(\Gamma)$ contienne un des O_n. Fixons un ouvert O de $L(\Gamma) \overset{\Delta}{\times} L(\Gamma)$. D'après le lemme 4.1, il existe γ_1 dans Γ tel que $\gamma_1 O \cap O_1 \neq \phi$. Soit K_1 un ouvert relativement compact de O tel que $\gamma_1 \bar{K}_1$ soit inclus dans O_1. Répétons le raisonnement précédent en remplaçant O par K_1 et O_1 par O_2, on obtient alors γ_2 dans Γ et un ouvert relativement compact K_2 tels que : $\bar{K}_2 \subset K_1$ et $\gamma_2 \bar{K}_2 \subset O_2$. De proche en proche on obtient un suite $(K_n)_{n\geq 1}$ d'ouverts relativement compacts emboités. Soit x dans $\bigcap_{n=1}^{+\infty} \bar{K}_n$. Pour tout $n \geq 1$, le point $\gamma_n(x)$ appartient à O_n. Considérons un point x' de $L(\Gamma) \overset{\Delta}{\times} L(\Gamma)$ et un voisinage V' de x'. Ce voisinage contient un ouvert O_n, donc $\gamma_n x$ appartient à V'. L'orbite Γx rencontre donc tous les voisinages de x', ce qui montre que x' appartient à $\overline{\Gamma x}$. En conclusion $\overline{\Gamma x} = L(\Gamma) \overset{\Delta}{\times} L(\Gamma)$. $\square$

Le résultat suivant sera démontré ultérieurement (chapitre V théorème V.2.3) en utilisant le flot horocyclique.

Théorème 4.3 *(mélange topologique) Soient O et V deux ouverts de $\Omega_g(T^1S)$, il existe $T > 0$ tel que pour tout $t \geq T$, $g_t O \cap V \neq \phi$.*

Ce théorème, lu sur $L(\Gamma) \overset{\Delta}{\times} L(\Gamma) \times \mathbb{R}$, entraîne le lemme 4.1. Remarquons également que ce théorème, accompagné du lemme de fermeture 3.4, permet d'obtenir une autre démonstration de la densité du groupe engendré par $\mathcal{L}(\Gamma)$ (propriété 3.6).

En effet, Γ n'étant pas élémentaire, il contient un groupe de Schottky H engendré par deux isométries hyperboliques. Montrons que le groupe engendré par $\mathcal{L}(H)$ est dense. Soient $\varepsilon > 0$ et N donnés par le lemme 3.4. Remarquons que ce lemme s'applique à tout $\Omega_g(H \setminus T^1\mathbb{H})$ car cet ensemble est compact. Soit V un ouvert de diamètre inférieur à $\frac{1}{N}$ de $\Omega_g(H \setminus T^1\mathbb{H})$. D'après le théorème 4.3, il existe $T > 0$ tel que pour tout $t \geq T$, $g_t V \cap V \neq \phi$. Choisissons $t \geq \mathrm{Max}(T,N)$ et u dans $g_t V \cap V$. D'après le lemme 3.2 il existe $t' \in [t-\varepsilon, t+\varepsilon]$ et u' périodique tels que $g_{t'}(u') = u'$, donc t' appartient à $\mathcal{L}(H)$. En résumé, nous obtenons que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $T' > 0$, tel que pour tout $t > T'$, l'intervalle $[t-\varepsilon, t+\varepsilon]$ rencontre $\mathcal{L}(H)$. Ceci montre que $\mathcal{L}(H)$ engendre un groupe dense.

Commentaires

Une grande partie des démonstrations de ce chapitre sont inspirées de celles proposées par P. Eberlein dans le contexte des variétés de Hadamard ([E_1], [E_3]). La plupart des résultats se généralisent donc à ce cas là (voir aussi [P]).

Le lecteur intéressé par l'aspect métrique, comme par exemple la construction de mesures finies sur l'ensemble non errant du flot géodésique, invariantes par ce flot, peut consulter le livre de Nicholls ([N]).

Concernant le spectre des longueurs (paragraphe 3), l'approche par le birapport que nous exposons est dûe à J-P. Otal ([O_2]) et I. Kim ([Ki]), et s'étend aux variétés de Hadamard. Si X est un espace homogène, si $dim X = 2$ ou encore si $L(\Gamma)$ est connexe, la propriété de densité du spectre des longueurs est encore satisfaite ([B0], [D_1], voir aussi [F] pour le cas complexe). En revanche, cette question est ouverte dans les autres cas.
Enfin, le problème plus classique du lien entre isospectralité et isométrie abordé dans le paragraphe 3 est encore largement non résolu sauf par exemple dans le cadre des surfaces de Hadamard d'aire finie ([C], [O_1]) et des espaces homogènes ([D-K]).

Chapitre IV

Groupes de Schottky et dynamique symbolique.

Notre idée ici est de proposer une approche symbolique de la dynamique du flot géodésique par le biais d'un exemple. Nous nous intéressons au cas particulier où le groupe Γ est un groupe de Schottky engendré par deux isométries hyperboliques (voir Chapitre II-1). Comme nous l'avons vu dans le chapitre II, l'ensemble limite d'un tel groupe est codé par des suites admissibles. Ce codage va nous permettre de relier la dynamique de $g_{\mathbb{R}}$ sur $\Gamma \setminus T^1\mathbb{H}$ à celle du décalage sur un espace de suites bilatères. Nous retrouvons par cette approche des résultats du chapitre III dans les paragraphes 2 et 3 et nous en obtenons d'autres dans le paragraphe 4.

Le groupe Γ est maintenant un groupe de Schottky engendré par deux isométries hyperboliques g_1 et g_2.

1 Suites bilatères

On rappelle que dans ce cas tous les points de $L(\Gamma)$ sont coniques (proposition II-1.10). Posons $\mathcal{A} = \{g_1^{\pm 1}, g_2^{\pm 1}\}$. L'application $x : \sum^+ \longrightarrow L(\Gamma)$, qui à une suite $s = (s_i)_{i\geq 1}$ associe $x(s) = \lim\limits_{n\to+\infty} s_1 \cdots s_n(O)$ est un homéomorphisme.

Introduisons l'ensemble des suites bilatères admissibles $\sum$ défini par :

$\sum = \{S = (S_i)_{i\in\mathbb{Z}} / S_i \in \mathcal{A}, (S_i)_{i\geq 1} \in \sum^+ , (S_{-i+1}^{-1})_{i\geq 1} \in \sum^+$ et $S_1 \neq S_0^{-1}\}$. Soit S dans $\sum$, on pose :

$$S^+ = (S_i)_{i\geq 1} \text{ et } S^- = (S_{-i+1}^{-1})i \geq 1$$

La condition $S_1 \neq S_0^{-1}$ implique $x(S^+) \neq x(S^-)$. La distance δ sur $\sum^+$ (voir §II-1) induit sur $\sum$ une distance Δ définie par :

$$\Delta(S,S') = \sqrt{\delta^2(S^+,S'^+) + \delta^2(S^-,S'^-)}.$$

Analysons la nature topologique de $(\sum,\Delta)$. Soit $(S_n)_{n\geq 1}$ une suite de $\sum$, posons $S_n = (S_{n,i})_{i\in\mathbb{Z}}$. L'alphabet $\mathcal{A}$ étant fini, il existe une suite extraite, $(S_n^1)_{n\geq 1}$ de $(S_n)_{n\geq 1}$ tel que les termes suivants soient constants : $S_{n,-1}^1 = S_{-1}, S_{n,0}^1 = S_0, S_{n,1}^1 = S_1$ pour tout $n \geq 1$. Plus généralement pour tout $k > 1$, on peut extraire une sous suite $(S_n^k)_{n\geq 1}$ de $(S_n^{k-1})_{n\geq 1}$ telle $S_{n,i}^k = S_i$ pour tout $n \geq 1$ et $|i| \leq k$. Posons $S = (S_i)_{i\in\mathbb{Z}}$, cette suite appartient à $\sum$. Considérons la suite $(A_k)_{k\geq 1}$ de $\sum$ définie par $A_{k,i} = S_{k,i}^i$ pour $i \in \mathbb{Z}$. Par construction $\Delta(A_k,S) \leq \frac{2}{k}$, donc $\lim\limits_{k\to+\infty} A_k = S$. Nous venons de démontrer la propriété suivante.

Propriété 1.1 *L'espace métrique $(\sum,\Delta)$ est compact.*

Notons X l'application de $\sum$ dans $L(\Gamma) \overset{\Delta}{\times} L(\Gamma)$ définie par : $X(S) = (x(S^-), x(S^+))$. Cette application est continue et injective car l'application $x : \sum^+ \to L(\Gamma)$ l'est (propriété II.1.9). En revanche X n'est pas surjective car si (y,y') appartient à $X(\sum)$ alors $y = x(s)$, $y' = x(s')$ avec $s_1 \neq s_1'$.

Lemme 1.2 *Quelque soit $(x_-,x_+$ dans $L(\Gamma) \overset{\Delta}{\times} L(\Gamma)$, il existe γ dans Γ et S dans $\sum$ tels que : $\gamma(x_-,x_+) = X(S)$.*

Démonstration

Soient $a = (ai)_{i\geq 1}$ et $b = (bi)_{i\geq 1}$ deux suites de $\sum^+$ telles que $x_- = x(a)$ et $x_+ = x(b)$. Par hypothèse $x_- \neq x_+$.

Considérons le plus petit $N \geq 1$ tel que $a_N \neq b_N$, notons S la suite bilatère définie par :

$$S_i = a_{N+i-1} \text{ si } i \geq 1 \text{ et } S_i = b_{N-i}^{-1} \text{ si } i \leq 0.$$

Cette suite appartient à $\sum$. Si $N = 1$, on a $X(S) = (x_-,x_+)$, sinon $X(S) = (a_1^{-1} \cdots a_{N-1}^{-1}(x_-), a_1^{-1} \cdots a_{N-1}^{-1}(x_+))$. $\square$

Considérons l'application de décalage sur $\sum$, encore notée T, et définie par $T((S_i)_{i\in\mathbb{Z}}) = (S_{i+1})_{i\in\mathbb{Z}}$. Remarquons que, à la différence du décalage sur $\sum^+$, l'application T est bijective. Par ailleurs T est continue. En effet, soit $(S_n)_{n\geq 1}$ une suite de $\sum$ convergeant vers S, pour tout $k > 1$, il existe $N > 0$

tel que si $n \geq N$, alors $S_{n,i} = S_i$ quelque soit $|i| \leq k$. Posons $T(S) = S'$ et $T(S_n) = S'_n$. Pour $n \geq N$, on a $S'_{n,i} = S'_i$ quelque soit $|i| \leq k-1$. Donc $\Delta(S',S'_n) \leq \frac{\sqrt{2}}{k-1}$. Ceci montre que $(S'_n)_{n\geq 1}$ converge vers S'.

On rappelle que π^1 désigne la projection de $T^1\mathbb{H}$ sur $T^1(\Gamma \setminus \mathbb{H})$. La proposition suivante relie la dynamique de $g_{\mathbb{R}^+}$ à celle de T.

Proposition 1.3 *Soient* S,S' *dans* $\sum$ *et* u,u' *dans* $T^1\mathbb{H}$ *tels que :* $(u(-\infty), u(+\infty)) = X(S)$ *et* $(u'(-\infty),u'(+\infty)) = X(S')$. *Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) $S' \in \overline{T^{\mathbb{N}}(S)}$ *(resp.* $S' \in \overline{T^{-\mathbb{N}}(S)}$*).*

(ii) $\pi^1(u') \in \overline{g_{\mathbb{R}^+}(\pi^1(u))}$ *(resp.* $\pi^1(u') \in \overline{g_{\mathbb{R}^-}(\pi^1(u))}$*).*

Démonstration

(i) $\Rightarrow$ (ii) Soit $(n_k)_{k\geq 1}$ une suite strictement croissante $\mathbb{N}^*$ telle que $\underset{k\to+\infty}{lim} T^{n_k}(S) = S'$. Posons $\gamma_k = S_1 \cdots S_{n_k}$. On a :

$$X(T^{n_k}(S)) = (\gamma_k^{-1}(u(-\infty)),\gamma_k^{-1}(u(+\infty))).$$

L'application X étant continue, $\underset{k\to+\infty}{lim} \gamma_k^{-1}(u(-\infty),u(+\infty)) =$ $(u'(-\infty),u'(+\infty))$. On déduit du lemme III-1.2, l'existence d'une suite $(s_k)_{k\geq 1}$ de $\mathbb{R}$ telle que $\underset{k\to+\infty}{lim} \tilde{g}_{s_k}\gamma_k^{-1}(u) = u'$. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que les s_k ont même signe, montrons que cette suite est positive. Si $(s_k)_{k\geq 1}$ est dans $\mathbb{R}^-$, le point $(\tilde{g}_{s_k}\gamma_k^{-1}u)(0)$ appartient au segment $[\gamma_k^{-1}(u(0)),\gamma_k^{-1}u(-\infty))$. Comme $\underset{k\to+\infty}{lim} (\tilde{g}_{s_k}\gamma_k^{-1}u)(0) = u'(0)$, nécessairement $\underset{k\to+\infty}{lim} \gamma_k^{-1}(u(0)) = u'(+\infty)$ et donc $\underset{k\to+\infty}{lim} \gamma_k^{-1}(0) = u'(+\infty)$. Par ailleurs $\gamma_k^{-1}(0)$ appartient à $D(s_{n_k}^{-1})$ et $\gamma_k^{-1}u(+\infty)$ appartient à $D(s_{n_k+1})$, car le premier terme de $T^{n_k}(S^+)$ est s_{n_k+1}. Ces demi-disques étant disjoints, $(\gamma_k^{-1}(0))_{k\geq 1}$ et $(\gamma_k^{-1}(u(+\infty)))_{k\geq 1}$ ne convergent pas vers le même point donc $(\gamma_k^{-1}(u(+\infty)))_{k\geq 1}$ ne peut pas converger vers $u'(+\infty)$. Par conséquent, les s_k sont positifs et donc $\pi^1(u') = \underset{k\to+\infty}{lim} g_{s_k}(\pi^1(u))$.

Le cas où $(n_k)_{k\geq 1}$ est une suite strictement décroissante de $\mathbb{N}^-$ se traite de façon analogue.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Soient $(t_k)_{k\geq 1}$ une suite strictement croissante non bornée de $\mathbb{R}^+$ et $(\gamma_k)_{k\geq 1}$ dans Γ tels que $\underset{k\to+\infty}{lim} \gamma_k\tilde{g}_{t_k}(u) = u'$. Comme t_k est positif nécessairement $\underset{k\to+\infty}{lim} \gamma_k u(0) = u'(-\infty)$. On a $\underset{k\to+\infty}{lim} \gamma_k(u(-\infty),u(+\infty)) =$ $(u'(-\infty),u'(+\infty))$. Ecrivons γ_k sous forme d'un mot réduit en $\mathcal{A}$. L'alphabet $\mathcal{A}$ étant fini, quitte à extraire une sous-suite on peut supposer que γ_k s'écrit $\gamma_k = a_1 \cdots a_{\ell_k}$ avec $a_i \in \mathcal{A}$, $a_{i+1} \neq a_i^{-1}$ et $\underset{k\to+\infty}{lim} \ell_k = +\infty$. S'il existe $k \geq 1$ tel que : $\gamma_k S_0^{-1} \cdots S_{\ell_{k-1}}^{-1} \neq Id$ et $\gamma_k S_1 \cdots S_{\ell_k} \neq Id$ cette propriété est alors vérifiée pour tout $p \geq k$. Dans ce cas le premier terme de $x^{-1}(\gamma_p(u(-\infty)))$ et de $x^{-1}(\gamma_p(u(+\infty))$ est a_1 donc, $\gamma_p(u(-\infty))$ et $\gamma_p(u(+\infty))$ appartiennent à $D(a_1)$. Ceci est impossible car : $\underset{p\rightarrow+\infty}{lim} \gamma_p(u(-\infty)) \in D(S_0'^{-1})$ et $\underset{p\rightarrow+\infty}{lim} \gamma_p(u(+\infty)) \in D(S_1')$ avec $S_0'^{-1} \neq S_1'$. Par conséquent, (1) $\gamma_k = S_{\ell_k-1} \cdots S_0$ ou (2) $\gamma_k = S_{\ell_k}^{-1} \cdots S_1^{-1}$ quelque soit $k \geq 1$. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que la relation (1) (resp. (2)) est satisfaite pour tout $k \geq 1$. Dans le premier cas, les ℓ_k premières lettres de $x^{-1}(\gamma_k(u(+\infty))$ sont les mêmes que celles de $x^{-1}(u(+\infty))$ donc $\underset{k\rightarrow+\infty}{lim} \gamma_k(u(0)) = u(+\infty)$, ce qui est impossible car $(t_{n_k})_{k\geq 1}$ est une suite positive. Dans le deuxième cas, on a $(T^{\ell_k}(S))^- = x^{-1}(\gamma_k(u(-\infty)))$ et $(T^{\ell_k}(S))^+ = x^{-1}(\gamma_k(u(+\infty)))$. Par ailleurs $\underset{k\rightarrow+\infty}{lim} \gamma_k(u(-\infty)) = u'(-\infty)$, $\underset{k\rightarrow+\infty}{lim} \gamma_k(u(+\infty)) = u'(+\infty)$, et l'application $x : \sum^+ \longrightarrow L(\Gamma)$ est un homéomorphisme, donc : $\underset{k\rightarrow+\infty}{lim} x^{-1}(\gamma_k(u(-\infty))) = S'^-$ et $\underset{k\rightarrow+\infty}{lim} x^{-1}(\gamma_k(u(+\infty))) = S'^+$. Ceci montre que : $\underset{k\rightarrow+\infty}{lim} T^{\ell_k}(S) = S'$.

Le cas où la suite $(t_k)_{k\leq 1}$ est négative se traite de façon analogue. $\square$

Nous nous proposons à présent de retrouver par le biais de la dynamique de $< T >$ sur $\sum$, deux résultats démontrés dans le chapitre III sur le flot géodésique.

2 Densité des éléments périodiques (Théorème III-3.3).

Commençons par établir un lien entre les suites périodiques (pour T) de $\sum$ et les éléments périodiques pour le flot géodésique sur $\Omega_g(\Gamma \setminus T^1\mathbb{H})$. Soit S une suite périodique de $\sum$ de période $S_1, S_2, \cdots, S_n$, posons $\gamma = S_1 \cdots S_n$. On a : $x(S^+) = \gamma^+$ et $x(S^-) = \gamma^-$. Donc si u vérifie $(u(-\infty), u(+\infty)) = X(S)$ alors $\pi^1(u)$ est périodique. Réciproquement, soit $\pi^1(u)$ un élément périodique pour $g_{\mathbb{R}}$, quitte à remplacer u par un élément de $\Gamma(u)$, on peut supposer qu'il existe un isométrie hyperbolique $\gamma = a_1 a_2 \cdots a_n$ avec $ai \in \mathcal{A}$, $a_{i+1} \neq a_i^{-1}$ et $a_1 \neq a_n^{-1}$ telle que : $u(-\infty) = \gamma^-$ et $u(+\infty) = \gamma^+$. Comme $a_1 \neq a_n^{-1}$, la suite $x^{-1}(\gamma^+)$ (resp. $x^{-1}(\gamma^-)$) est périodique de période $a_1, \cdots, a_n$ (resp $a_n^{-1}, \cdots, a_1^{-1}$) et la suite bilatère $(S_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ périodique, de période $S_1 = a_1, \cdots, S_n = a_n$, appartient à $\sum$ et vérifie $X(S) = (\gamma^-, \gamma^+)$. Nous venons de démontrer la propriété suivante :

Propriété 2.1 *Soit u dans $T^1\mathbb{H}$. L'élément $\pi^1(u)$ est périodique si et seulement s'il existe une suite bilatère périodique S dans $\sum$ et γ dans Γ tels que $\gamma(u(-\infty), u(+\infty)) = X(S)$.*

Montrons à présent la densité des éléments périodiques de $g_{\mathbb{R}}$ dans $\Omega_g(\Gamma \setminus T^1\mathbb{H})$ (théorème III-3.3).

Soit $\pi^1(u)$ dans $\Omega_g(\Gamma \setminus T^1\mathbb{H})$, d'après le lemme 1.2, il existe γ dans Γ et S dans $\sum$ tels que $\gamma(u(-\infty),u(+\infty)) = X(S)$. Pour chaque $n \geq 1$, choisissons a_{n+1} dans $\mathcal{A} - \{S_n^{-1},S_{-n}^{-1}\}$. Considérons la suite $(S^k)_{k\geq 1}$ de $\sum$ dont chaque terme est périodique de période: $S_1^k = S_1,S_2^k = S_2,\cdots,S_k^k = S_k,S_{k+1}^k = a_{k+1}$, $S_{k+2}^k = S_{-k},S_{k+3}^k = S_{-k+1},\cdots S_{2k+2}^k = S_0$. On a: $\Delta(S^k,S) \leq \frac{\sqrt{2}}{k}$ donc $\lim\limits_{k\to+\infty} S^k = S$. Pour chaque $k \geq 1$, choisissons u_k dans $T^1\mathbb{H}$ tel que: $(u_k(-\infty),u_k(+\infty)) = X(S^k)$. D'après la propriété 2.1, $\pi^1(u_k)$ est périodique. Par ailleurs $\lim\limits_{k\to+\infty} (u_k(-\infty),u_k(+\infty)) = (u(-\infty),u(+\infty))$ car X est continue, donc il existe une suite $(s_k)_{k\geq 1}$ de $\mathbb{R}$ telle que $(g_{s_k}(\pi^1(u_k)))_{k\geq 1}$ converge vers $\pi^1(u)$.

3 Existence d'orbites denses (corollaire III-4.2)

D'après la proposition 1.3, démontrer l'existence d'orbites denses pour $g_{\mathbb{R}^+}$ (resp. $g_{\mathbb{R}^-}$) revient à démontrer l'existence d'orbites denses par le semi-groupe $T^{\mathbb{N}}$ (resp. $T^{-\mathbb{N}}$) sur $\sum$. Construisons de telles orbites sur $\sum$. Soit $V = (V_i)_{i\in I}$ avec $I \subset \mathbb{Z}$ une suite finie ou infinie, de $\mathcal{A}$ on appelle **bloc de** V une suite finie B constituée de termes consécutifs de V : $B = (V_{n+i})_{1\leq i\leq k}$ On dit que B est **positif** (resp. **négatif**) si $n \geq 0$ (resp. $n + k \leq 0$).

Propriété 3.1 *Soit S dans $\sum$, les assertions suivantes sont équivalentes*

(i) Tout mot réduit $a_1 \cdots a_n$ avec $ai \in \mathcal{A},a_{i+1} \neq a_i^{-1}$ est un bloc positif (resp. négatif) de S.

(ii) $\overline{T^{\mathbb{N}}(S)} = \sum$ (resp $\overline{T^{-\mathbb{N}}(S)} = \sum$).

Démonstration (dans le cas positif).

(i) $\Rightarrow$ (ii) Soit $S' = (S_i')_{i\in\mathbb{Z}}$ dans $\sum$. Considérons le mot réduit $S_{-n}'S_{-n+1}' \cdots S_0'S_1' \cdots S_n'$. Par hypothèse, il existe $k_n \in \mathbb{N}$ tel que $T^{k_n}(S)$ soit une suite S^n vérifiant $S_i^n = S_i'$ pour tout $-n \leq i \leq n$. On a $\Delta(S',S^n) \leq \frac{\sqrt{2}}{n}$ donc $\lim\limits_{k\to+\infty} T^{k_n}(S) = S'$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Soient $m = a_1 \cdots a_n$ un mot réduit et c dans $\mathcal{A} - \{a_n^{-1},a_1^{-1}\}$. La suite bilatère périodique S' de période $S_1' = a_1,S_2' = a_2,S_n' = a_n,S_{n+1}' = c$ appartient à $\sum$. Comme $\overline{T^{\mathbb{N}}}(S) = \sum$, il existe $(k_p)_{p\geq 1}$ dans $\mathbb{N}$ tel que $\lim\limits_{p\to+\infty} T^{k_p}(S) = S'$. Posons $T^{k_p}(S) = S^p$. Pour p grand, $\Delta(S',S^p) \leq \frac{1}{n+1}$ donc $S_i^p = S_i'$ pour tout $1 \leq i \leq n+1$. Ceci montre que $a_1,a_2,\cdots,a_n$ est un bloc positif de S. $\square$

Il nous reste à présent à construire des suites satisfaisant la propriété (ii).

Pour chaque n dans $\mathbb{N}^*$, notons E_n l'ensemble des mots réduits $m_n = a_1 \cdots a_n$, avec $a_i \in \mathcal{A}$ et $a_i \neq a_{i+1}^{-1}$, de longueur n et ℓ_n son cardinal. Fixons une numérotation, $(m_{n,i})_{1\leq i\leq \ell_n}$ des éléments de E_n. Pour $1 \leq i < \ell_n$, choisissons une lettre a_i de $\mathcal{A}$ différente de l'inverse de la dernière lettre du mot $m_{n,i}$ et de la première du mot $m_{n,i+1}$. Le mot $m_{n,1}c_1m_{n,2}c_2\cdots c_{\ell_n}$ est réduit. Notons $B_n=(B_{n,i})_{1\le i\le p_n}$ la suite finie des lettres le formant. Choisissons d_0 dans $\mathcal{A}$ différent de $B_{1,1}^{-1}$ et pour $n\ge 1$, choisissons d_n dans $\mathcal{A}-\{B_{n,p_n}^{-1};B_{n+1,1}^{-1}\}$. Notons S la suite bilatère définie par $S_i=d_0$ pour tout $i\le 0$ et dont la suite S^+ est construite à partir des blocs $(B_n)_{n\ge1}$ et la suite $(d_n)_{n\ge1}$ de la façon suivante :

$$S^+=\underbrace{B_{1,1},B_{1,2},\cdots,B_{1,p_1}}_{B_1},d_1,\underbrace{B_{2,1},\cdots,B_{2,p_2}}_{B_2},d_2,\underbrace{\cdots B_{n,p_n}}_{B_n},d_n,\underbrace{B_{n+1,1}\cdots}_{B_{n+1}}$$

La suite S appartient à $\sum$. Par construction, la suite S^+ contient tous les blocs **réduits** finis donc, d'après la propriété 3.1, $\overline{T^{\mathbb{N}}(S)}=\sum$.
Remarquons que la suite S' définie par : $S'_i=d_0$ pour $i\ge1$ et $S'_i=S_{-i+1}$ pour $i\le 0$, appartient à $\sum$. La suite S^- contient tous les mots réduits donc $\overline{T^{-\mathbb{N}}(S')}=\sum$.

La question suivante n'a pas été abordée dans le chapitre III.

4 Existence de compacts minimaux non périodiques.

Un sous-ensemble F d'un espace topologique est **minimal** relativement à un groupe H d'homéomorphismes s'il est non vide, fermé, invariant par H et minimal au sens de l'inclusion pour ces propriétés. Un tel ensemble est nécessairement l'adhérence d'une orbite de H. Une orbite périodique pour le flot géodésique sur $\Omega_g(T^1S)$ est un exemple de minimal relativement à $g_{\mathbb{R}}$. Une suite décroissante de compacts invariants par $g_{\mathbb{R}}$ contient un plus petit élément, donc tout compact de $\Omega_g(T^1S)$ invariant par le flot géodésique contient un minimal. Notre but est de construire à l'aide des suites bilatères, des minimaux pour $g_{\mathbb{R}}$ non périodiques. Pour cela nous allons construire des minimaux non périodiques pour l'action de $<T>$ sur $\sum$.

Propriété 4.1 Soit $S=(S_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ une suite de $\sum$. Il y a équivalence entre les assertions suivantes :

(i) *Quelque soit n dans $\mathbb{N}^*$, il existe $N(n)$ tel que pour tout j dans $\mathbb{Z}$, la suite $S_{-n},S_{-n+1},\cdots,S_0,S_1,\cdots,S_n$ soit un bloc de la suite $S_{j+1},\cdots,S_{j+N(n)}$.*

(ii) *$\overline{T^{\mathbb{Z}}(S)}$ est un ensemble minimal.*

Démonstration

(i) $\Rightarrow$ (ii) Nous allons montrer que pour tout S' dans $\overline{T^{\mathbb{Z}}(S)}$, la suite appartient à $\overline{T^{\mathbb{Z}}(S')}$.Ceci montrera que $\overline{T^{\mathbb{Z}}(S)}$ est minimal. Soit $(p_k)_{k\ge1}$ dans $\mathbb{Z}$ tel que $\underset{k\to+\infty}{lim}T^{p_k}(S)=S'$. On a $T^{p_k}(S)=(S_{p_k+i})_{i\in\mathbb{Z}}$. Fixons n dans $\mathbb{N}^*$. Soit $N(n)$ l'entier donné par (i). Comme $\underset{k\to+\infty}{lim}T^{p_k}(S)=S'$, il existe $K>0$ tel que pour tout $k>K$, $S_{p_k+i}=S'_i$ quelque soit $|i|\le N(n)$. D'après (i), il existe $N(n) \leq j_n \leq N(n) + 2n + 1$ tel que $S'_{j_n+i} = S_i$ pour tout $|i| \leq n$. On a donc $\Delta(T^{j_n}(S'),S) \leq \frac{\sqrt{2}}{n}$. Ceci montre que $\underset{k\to+\infty}{lim} T^{j_n}(S') = S$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe n_0 dans $\mathbb{N}$ tel que pour tout N dans $\mathbb{N}^*$, il existe j_N dans $\mathbb{Z}$ pour lequel la suite $S_{j_{N}+1}, \cdots ,S_{j_{N}+N}$ ne contienne pas le bloc $S_{-n_0},S_{-n_0+1}, \cdots ,S_0, \cdots ,S_{n_0}$. Considérons la suite $(T^{j_N+1+n_0}(S))_{N\geq1}$. Posons $S^N = T^{j_N+1+n_0}(S)$. L'ensemble $\sum$ est compact donc on peut supposer, quitte à extraire une sous-suite, que $(S^N)_{N\geq1}$ converge vers $S' \in \sum$. Montrons que S n'appartient pas à $\overline{T^{\mathbb{Z}}(S')}$. Supposons qu'il existe $(n_k)_{k\geq1}$ dans $\mathbb{Z}$ tel que : $\underset{k\to+\infty}{lim} T^{n_k}(S') = S$. Dans ce cas, pour $k \geq K$, on a $S'_{n_k+i} = S_i$ pour tout $|i| \leq n_0$. Fixons $k \geq K$, on a $\underset{N\to+\infty}{lim} S^N = S'$ donc $\underset{N\to+\infty}{lim} T^{n_k}S^N = T^{n_k}S'$. On en déduit que pour N grand, on a $S_{j_N+1+n_0+n_k+i} = S'_{n_k+i}$ pour tout $|i| \leq n_0$. Prenons N grand et $N \geq 1 + 3n_0 + n_k$, la suite $S_{j_N+1}, \cdots ,S_{j_N+N}$ contient le bloc $S_{-n_0}, \cdots ,S_0, \cdots ,S_{n_0}$ ce qui est contradictoire. En conclusion S n'appartient pas à $\overline{T^{\mathbb{Z}}(S')}$ et donc $\overline{T^{\mathbb{Z}}(S)}$ n'est pas minimal. $\square$

Il nous reste à construire une suite de $\sum$ satifaisant la propriété (i). Pour cela, considérons la suite de mots réduits $(m_n)_{n\geq1}$ définie par récurrence par : $m_1 = g_1,m_{n+1} = m_n g_2 m_n m_n g_2 m_n$. Notons ℓ_n la longueur du mot m_n. Les ℓ_n premières lettres de m_{n+1} coïncident avec celles de m_n et la première lettre de m_n est différente de l'inverse de sa dernière lettre, on peut donc définir la suite $S = (S_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ par : $S_i \in \mathcal{A}$ et $S_{-\ell_n+1}\ S_{-\ell_n+2} \cdots S_0 S_1 \cdots S_{\ell_n} = m_n m_n$. Cette suite appartient à $\sum$.

Lemme 4.2 *Soit $n \geq 1$, quelque soit $k \geq n+1$, tout bloc de longueur $6\ell_n+3$ de la suite $S_{-\ell_k+1}, \cdots ,S_0,S_1, \cdots ,S_{\ell_k}$ contient le bloc $S_{-\ell_n},S_{-\ell_n+1}, \cdots ,S_0,S_1, \cdots ,S_{\ell_n}$.*

Démonstration

Fixons $n \geq 1$. Posons $A_k = m_k m_k$ et procédons par récurrence sur $k \geq n + 1$. On a $A_{n+1} = m_n g_2 A_n g_2 A_n g_2 A_n g_2 m_n$. La longueur des suites associées à m_n et A_n étant ℓ_n et $2\ell_n$, tout bloc de longueur $6\ell_n + 3$ de la suite associée à A_{n+1} contient le bloc de la suite associée à A_n ce qui démontre la propriété pour $k = n + 1$. Supposons à présent que la propriété soit vraie jusqu'au rang $p > n + 1$, montrons qu'elle est vraie au rang $p + 1$. On a $A_{p+1} = m_p g_2 A_p g_2 A_p g_2 A_p g_2 m_p$. Considérons un bloc B de longueur $6\ell_n+3$ de la suite associée à A_{p+1}. Si B est un bloc de A_p ou de m_p, l'hypothèse de récurrence s'applique. Sinon B est un bloc de la suite associée à l'un des mots suivants : (1) $m_p g_2 A_p$, (2) $A_p g_2 A_p$, (3) $A_p g_2 m_p$, contenant la lettre g_2 apparaissant dans ces mots, notons cette lettre $\bar{g}_2$. Comme $m_p = m_{p-1} g_2 A_{p-1} g_2 m_{p-1}$ et $A_p = m_p m_p$, la suite associée au mot $M_n = A_n g_2 m_n \bar{g}_2 m_n g_2 A_n$ est un bloc de longueur $6\ell_n + 3$ de la suite associée aux mots (1), (2), (3) et le deuxième g_2 apparaissant dans M_n coïncide avec $\bar{g}_2$. La longueur du bloc B est $6\ell_n + 3$ et B contient $\bar{g}_2$, donc B contient la suite associée à A_n. $\square$

Corollaire 4.3 *Le fermé* $\overline{T^{\mathbb{Z}}(S)}$ *est minimal et non périodique.*

Démonstration

Montrons que la propriété 4.1 (i) est satisfaite. Fixons $n \in \mathbb{N}$, par construction de S, pour tout $j \in \mathbb{Z}$ il existe $k \geq n+1$ tel que la suite finie B: $S_{j+1}, \cdots, S_{j+6\ell_n+3}$ soit un bloc de $S_{-\ell_k+1}, \cdots, S_0, S_1, \cdots, S_{\ell_k}$. D'après le lemme 4.2, le bloc B contient $S_{-\ell_n+1}, \cdots, S_0, \cdots, S_{\ell_n}$, donc en particulier $S_{-n}, \cdots, S_0, \cdots, S_n$. Par ailleurs S n'est pas périodique. □

Revenons au flot géodésique sur $\Omega_g(\Gamma \setminus T^1\mathbb{H})$. Soit u dans $T^1\mathbb{H}$ tel que $(u(-\infty), u(+\infty)) = X(S)$. Puisque S n'est pas périodique, $\pi^1(u)$ ne l'est pas non plus. Comme $L(\Gamma) = L_c(\Gamma)$, l'ensemble $\Omega_g(\Gamma \setminus T^1\mathbb{H})$ est compact et donc $g_{\mathbb{R}}(\pi^1(u))$ n'est pas fermé.

Montrons que $\overline{g_{\mathbb{R}}(\pi^1(u))}$ est minimal relativement à $g_{\mathbb{R}}$. Soit $\pi^1(u')$ dans $\overline{g_{\mathbb{R}}(\pi^1(u))}$, d'après le lemme 1.2, quitte à remplacer u' par un élément de $\Gamma(u')$, on peut supposer qu'il existe S' dans $\sum$ tel que $(u'(-\infty), u'(+\infty)) = X(S')$. D'après la propriété 4.1, on a : $S' \in \overline{T^{\mathbb{Z}}(S)}$. Comme $\overline{T^{\mathbb{Z}}(S)}$ est minimal, S appartient à $\overline{T^{\mathbb{Z}}(S')}$. Donc $\pi^1(u)$ appartient à $\overline{g_{\mathbb{R}}(\pi^1(u'))}$ ce qui montre que $\overline{g_{\mathbb{R}}(\pi^1(u))}$ est minimal. On déduit de cette construction et de l'existence de groupes de Schottky dans un groupe fuchsien non élémentaire l'application suivante :

Théorème 4.4 *Soit* Γ *un groupe fuchsien non élémentaire. L'ensemble* $\Omega_g(\Gamma \setminus T^1\mathbb{H})$ *contient des ensembles minimaux compacts, non périodiques pour le flot géodésique.*

Démonstration

Puisque Γ n'est pas élémentaire, il contient un groupe de Schottky Γ_0 engendré par deux isométries hyperboliques (Proposition II-1-6). D'après la construction qui précède $\Omega_g(\Gamma_0 \setminus T^1\mathbb{H})$ contient des minimaux compacts non périodiques relativement au flot géodésique.

Fixons un tel compact K_0. Notons q la projection de $\Omega_g(\Gamma_0 \setminus T^1\mathbb{H})$ sur $\Omega_g(\Gamma \setminus T^1\mathbb{H})$ et posons $K = q(K_0)$. Pour tout t dans $\mathbb{R}$, on a : $g_t \circ q = q \circ g_t$, donc K est un compact invariant par $g_{\mathbb{R}}$. Ce compact est minimal. En effet, soit K' un compact invariant par $g_{\mathbb{R}}$ inclus dans K, puisque K_0 est minimal, le fermé $q^{-1}(K') \cap K_0$ coïncide avec K_0 et donc $K' = K$. Montrons que K n'est pas périodique. Supposons qu'il existe v dans K_0 tel que $K = g_{\mathbb{R}}(q(v))$. Puisque $K_0 \neq g_{\mathbb{R}}(v)$, il existe une suite $(t_n)_{n\geq 1}$ non bornée telle que $(g_{t_n}(v))_{n\geq 1}$ converge vers un élément w de $K_0 - g_{\mathbb{R}}(v)$. Relevons la situation sur $T^1\mathbb{H}$. Notons $\tilde{v}$ et $\tilde{w}$ un relevé de v et w. Il existe $(\gamma_n)_{n\geq 1}$ dans Γ_0 tel que : $\lim_{n\to+\infty} \gamma_n \tilde{g}_{t_n}(\tilde{v}) = \tilde{w}$. Par ailleurs, $K = g_{[a,b]}(q(v))$, donc il existe une suite $(s_n)_{n\geq 1}$ dans $[a,b]$, que l'on peut supposer convergente vers un réel s, et une suite $(\gamma'_n)_{n\geq 1}$ dans Γ telles que : $\tilde{g}_{t_n}(\tilde{v}) = \gamma'_n \tilde{g}_{s_n}(\tilde{v})$. De plus, $\tilde{w} = \gamma \tilde{g}_t(\tilde{v})$ avec

$t \in \mathbb{R}$ et $\gamma \in \Gamma$. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \gamma_n\gamma_n'\tilde{g}_{s_n}(\tilde{v}) = \gamma\tilde{g}_t(\tilde{v})$, or Γ est discret et $(s_n)_{n\geq 1}$ est borné, donc il existe $N > 0$ et h dans Γ tels que $\gamma_n\gamma_n' = h$. Par conséquent, $\tilde{g}_{t_n}(\tilde{v}) = \gamma_n^{-1}h(\tilde{g}_{s_n}(\tilde{v}))$ et $h\tilde{g}_s(\tilde{v}) = \tilde{w}$. On obtient $\tilde{w} = \gamma_n\tilde{g}_{s-s_n+t_n}(\tilde{v})$. Ceci contredit le choix de w. $\square$

Commentaires

Cette approche du flot géodésique par la dynamique symbolique a été développée à l'origine pour la surface modulaire ([A], [Ar], [S$_3$], [D-P1]). Dans [S$_1$], C. Séries l'étend aux quotients de $\mathbb{H}$ par les groupes fuchsiens géométriquement finis.

Un tel point de vue se généralise également aux quotients de variétés de Hadamard par des groupes de Schottky ([D-P2]). Il constitue une méthode possible pour étudier par exemple le comptage des géodésiques fermées ([B], [L], [D-P2]). Le livre de Bedford-Keane-Séries ([B-K-S]) est une bonne introduction sur cette approche et ses applications.

Comme nous l'avons vu dans le paragraphe 4, le codage du flot permet également de construire des ensembles minimaux. Cette construction est dûe à Morse (voir le livre de Gottschalk-Hedlund [G-H]). Les ensembles que nous avons construits sont compacts, dans ([D-S]), nous proposons une construction de minimaux non compacts, en présence de points paraboliques.

Chapitre V

Dynamique topologique du flot horocyclique.

Soient u un élément $T^1\mathbb{H}$ et H l'horocycle passant par $u(0)$ basé en $u(+\infty)$. On note $\beta : \mathbb{R} \longrightarrow H$ le paramètrage par longueur d'arcs de H d'origine $u(0)$ pour lequel $\left(\frac{d}{ds}\,|_{s=0}^{\beta(s)}, \overrightarrow{u}\right)$ forme une base directe de $T_{u(0)}\mathbb{H}$. L'image de $\mathbb{R}$ par β est **l'horocycle orienté associé à** u.
Considérons l'application $\tilde{h}_0 : \mathbb{R} \longrightarrow$ Difféo $(T^1\mathbb{H})$ définie par : $\tilde{h}_t(u')(0) = \beta(t)$ et $\overrightarrow{\tilde{h}_t(u)}$ est le vecteur de $T^1_{\beta(t)}\mathbb{H}$ pour lequel $\left(\frac{d}{ds}\,|_{s=t}^{\beta(s)}, \overrightarrow{\tilde{h}_t(u)}\right)$ est une base orthonormée directe de $T_{\beta(t)}\mathbb{H}$.
Remarquons que si $u(+\infty) = \infty$, les parties réelles et imaginaires de $u(0)$ et de $\tilde{h}_t(u)(0)$ sont liées par : $Im(u(0)) = Im(\tilde{h}_t(u)(0))$ et $Re(\tilde{h}_t(u)(0)) = tIm(u(0)) + Re(u(0))$.

On a $\tilde{h}_{t+t'} = \tilde{h}_t \circ \tilde{h}_{t'}$ et $D(\tilde{h}_t(u), \tilde{h}_{t'}(u')) \leq |t - t'|$ donc $\tilde{h}$ est une action continue de $(\mathbb{R},+)$ sur $T^1\mathbb{H}$. L'image notée, $\tilde{h}_{\mathbb{R}}$, de $\mathbb{R}$ par $\tilde{h}$, est appelée **flot horocyclique** sur $T^1\mathbb{H}$.
Le groupe G préserve les distances et l'orientation donc les horocycles orientés sont préservés et la relation suivante est satisfaite :

$$(R_1) \quad \forall \gamma \in G, (\gamma \circ \tilde{h}_t)(u) = (h_t \circ \gamma)(u)$$

Nous fixons un groupe fuchsien Γ **qui n'est pas élémentaire** et nous conservons les notations introduites dans le chapitre III.

D'après la relation (R_1), l'application $\tilde{h}_t$ induit une application continue $h_t : T^1S \longrightarrow T^1S$ définie par $h_t(\pi^1(u)) = \pi^1(\tilde{h}_t(u))$ et donc une action continue de $(\mathbb{R},+)$ sur T^1S. Le groupe $h_{\mathbb{R}}$ est appelé **flot horocyclique** sur T^1S.

Notre but est d'étudier la topologie des orbites de ce flot en passant par l'action linéaire de Γ, considéré comme sous-groupe de PSL(2,$\mathbb{R}$), sur $\{\pm Id\} \setminus \mathbb{R}^2_*$.

1 Dualité entre l'action linéaire de Γ et celle de $h_{\mathbb{R}}$.

Nous relions ici la topologie des orbites de $h_{\mathbb{R}}$ sur T^1S à celle des orbites linéaires de Γ sur le quotient noté, E, de $\mathbb{R}^2_*$ par $\{\pm Id\}$.

Considérons l'application v de $T^1\mathbb{H}$ dans E définie par :

$$\begin{array}{rcl} v : T^1\mathbb{H} & \longrightarrow & E \\ u & \longmapsto & \pm \dfrac{e^{\frac{1}{2}B_{u(+\infty)}(i,u(0))}}{\sqrt{1+u^2(+\infty)}} \begin{pmatrix} u(+\infty) \\ 1 \end{pmatrix} \text{ si } u(+\infty) \neq \infty \\ u & \longmapsto & \pm e^{\frac{1}{2}B_{u(+\infty)}(i,u(0))} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ si } u(+\infty) = \infty \end{array}$$

Remarquons que si $u(+\infty) = \infty$ et $u(0) = i$ alors $v(u) = \pm \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

L'application v est surjective et constante sur les orbites de $\tilde{h}_{\mathbb{R}}$, elle induit donc une bijection de l'espace des orbites $\tilde{h}_{\mathbb{R}} \setminus T^1\mathbb{H}$ sur E.

Soit $g \in G$, posons $g(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ avec $ad-bc = 1$, et notons M_g l'application "linéaire" sur E définie analytiquement par :

$$\forall \pm \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \{\pm Id\} \setminus \mathbb{R}^2_*, \quad M_g\left(\pm \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \pm \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Lemme 1.1 *Pour tous g dans G et u dans $T^1\mathbb{H}$, on a : $v(g(u)) = M_g(v(u))$.*
Démonstration

Considérons u_1 dans $T^1\mathbb{H}$ défini par $u_1(+\infty) = \infty$ et $u_1(0) = i$. On rappelle que $v(u_1) = \pm e_1$ avec $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Montrons que $v(g(u_1)) = M_g(\pm e_1)$ pour tout g dans G. Décomposons la matrice $M_g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ sous la forme $M_g = KAN$ avec $K = \begin{pmatrix} cos\theta & sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$,$\lambda > 0$, $N = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (propriété I.1.2). Notons respectivement k,a,n les homographies associées à K,A,N. On a $B_\infty(i,g^{-1}(i)) = B_\infty(i,a^{-1}(i))$ et $B_\infty(i,a^{-1}(i)) = B_\infty(i,\lambda^{-2}i)$ donc $B_\infty(i,g^{-1}(i)) = Ln\lambda^{-2}$. Par ailleurs $\|M(e_1)\| = \lambda$ donc $\|v(g(u_1))\| = \|M_g(\pm e_1)\|$. De plus $g(u_1)(+\infty) = k(\infty)$ et $M(e_1)$ est colinéaire à $K(e_1)$. On déduit de ces deux propriétés, l'égalité cherchée.
Montrons à présent que pour tout u dans $T^1\mathbb{H}$ $v(g(u)) = M_g v(u)$. L'action de G sur $T^1\mathbb{H}$ étant simplement transitive, il existe g' dans G tel que : $g'(u_1) = u$. Ainsi $v(g(u)) = v(gg'(u_1))$, donc $v(g(u)) = M_{gg'}(v(u_1))$. Pour conclure il suffit de remarquer que $Mgg'(v(u_1)) = M_g(M_{g'}(v(u_1)))$ et que $M_{g'}(v(u_1)) = v(g'(u_1))$. $\Box$

Une conséquence de ce lemme est la continuité de l'application v. En effet, soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite de $T^1\mathbb{H}$ convergeant vers u. L'action de G sur $T^1\mathbb{H}$ étant simplement transitive, il existe une unique suite $(g_n)_{n\geq 1}$ de G telle que $g_n(u_1) = u_n$. L'application de G sur $T^1\mathbb{H}$ qui à g associe $g(u_1)$ est un homéomorphisme donc $(g_n)_{n\geq 1}$ converge vers $g \in G$ et $g(u_1) = u$. D'après le lemme 1.1, $v(g_n(u_1)) = g_n(\pm e_1)$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v(u_n) = v(u)$.

Les propriétés suivantes proposent une lecture linéaire des différents styles de points de $L(\Gamma)$ décrits dans le paragraphe I-3. Leurs démonstrations résultent directement des définitions et du lemme précédent.

Propriété 1.2 *Soit u dans $T^1\mathbb{H}$.*

(i) Le point $u(+\infty)$ est horocyclique si et seulement s'il existe $(\gamma_n)_{n\geq 1}$ dans Γ tel que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \|\gamma_n(v(u))\| = 0$.

(ii) Le point $u(+\infty)$ est parabolique si et seulement s'il existe γ dans $\Gamma - \{Id\}$ fixant $v(u)$.

Introduisons l'ensemble, $\widetilde{\Omega}_h(T^1S)$, composé des u de $T^1\mathbb{H}$ tels que $u(+\infty)$ appartienne à $L(\Gamma)$ et posons $\Omega_h(T^1S) = \pi^1(\widetilde{\Omega}_h(T^1S))$. Cette notation sera justifiée dans le paragraphe 3.

L'ensemble $\widetilde{\Omega}_h(T^1S)$ est fermé invariant par Γ et $\tilde{h}_{\mathbb{R}}$. Posons $E(\Gamma) = v(\widetilde{\Omega}_h(T^1S))$. Si $L(\Gamma) = \mathbb{H}(\infty)$ alors $E(\Gamma) = E$.

L'ensemble $E(\Gamma)$ est invariant par l'action linéaire de Γ. Montrons qu'il est fermé. Soit $(v_n)_{n\geq 1}$ une suite de $E(\Gamma)$ convergeant vers $v \in E$ et g dans G tel que $g(v_n)$ et $g(v)$ n'appartiennent à la droite $\pm\mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Posons $g(v_n) = \pm\lambda_n\begin{pmatrix} x_n \\ 1 \end{pmatrix}$ et $(g'v) = \pm\lambda\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$. On a $\underset{n\to+\infty}{lim} |\lambda_n| = |\lambda|$ et $\underset{n\to+\infty}{lim} x_n = x$. Or x_n appartient à $g(L(\Gamma))$ qui est fermé, donc x appartient à $L(\Gamma)$, et par conséquent v appartient à $E(\Gamma)$.

Nous sommes à présent en mesure de relier la dynamique de $h_{\mathbb{R}}$ sur T^1S à celle de Γ sur E.

Propriété 1.3 *Soit u dans $T^1\mathbb{H}$.*

(i) L'orbite sous $h_{\mathbb{R}}$ de $\pi^1(u)$ est fermée dans T^1S si et seulement si l'orbite sous Γ de $v(u)$ est fermée dans E.

(ii) L'orbite sous $h_{\mathbb{R}}$ de $\pi^1(u)$ est dense dans $\Omega_h(T^1S)$ si et seulement si l'orbite sous Γ de $v(u)$ est dense dans $E(\Gamma)$.

Démonstration

(i) Supposons que $h_{\mathbb{R}}(\pi^1(u))$ soit fermé. Soit $(\gamma_n v(u))_{n\geq 1}$ une suite convergente. Par construction de l'application v, les suites $(\gamma_n u(+\infty))_{n\geq 1}$ et $(B_{\gamma_n(u(+\infty))}(i,\gamma_n(u(0)))_{n\geq 1}$ convergent respectivement vers x et t. Considérons le réel t_n tel que $\tilde{h}_{t_n}(\gamma_n(u)(0)$ appartienne à la géodésique passant par i d'extrémité $\gamma_n(u(+\infty))$. Soient z le point de $\mathbb{H}$ vérifiant : $B_x(i,z) = t$, appartenant à la géodésique passant par i d'extrémité x, et u' dans $T^1\mathbb{H}$ tel que $u'(+\infty) = x$ et $u'(0) = z$. La suite $(\tilde{h}_{t_n}\gamma_n(u))_{n\geq 1}$ converge vers u'. Comme $h_{\mathbb{R}}(\pi^1(u))$ est fermé, il existe $\gamma \in \Gamma$ et $s \in \mathbb{R}$ tels que $u' = \gamma\tilde{h}_s(u)$. L'application v étant continue, la suite $(v(\tilde{h}_{t_n}\gamma_n(u)))_{n\geq 1} = (\gamma_n v(u))_{n\geq 1}$ converge vers $\gamma v(u)$ ce qui montre que $\Gamma(v(u))$ est fermé.

Supposons à présent que $\Gamma v(u)$ soit fermé, ceci entraîne que $\tilde{h}_{\mathbb{R}}\Gamma(u)$ est fermé et donc que $h_{\mathbb{R}}\pi^1(u)$ l'est aussi.

(ii) Supposons que $h_{\mathbb{R}}(\pi^1(u))$ soit dense dans $\Omega_h(T^1S)$, dans ce cas $\tilde{h}_{\mathbb{R}}\Gamma(u)$ est dense dans $\widetilde{\Omega}_h(T^1S)$. L'application v étant continue, $\overline{\Gamma v(u)} = E(\Gamma)$. Réciproquement, supposons que $\Gamma v(u)$ soit dense dans $E(\Gamma)$. Soit u' dans $\widetilde{\Omega}_h(T^1S)$, il existe $(\gamma_n)_{n\geq 1}$ dans Γ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} \gamma_n v(u) = v(u')$. Les suites $(\gamma_n(u(+\infty)))_{n\geq 1}$ et $(B_{\gamma_n(u(+\infty))}(i,\gamma_n(u(0)))_{n\geq 1}$ convergent donc respectivement vers $u'(+\infty) \in L(\Gamma)$ et $B_{u'(+\infty)}(i,u'(0))$. Considérons le réel t_n tel que $\tilde{h}_{t_n}(\gamma_n(u))(0)$ appartienne à la géodésique passant par $u'(0)$ d'extrémité $\gamma_n u(+\infty)$. La suite $(\tilde{h}_{t_n}\gamma_n(u)(+\infty))_{n\geq 1}$ converge vers $u'(+\infty)$ et $(\tilde{h}_{t_n}\gamma_n(u)(0))_{n\geq 1}$ converge vers $u'(0)$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} h_{t_n}(\pi^1(u)) = \pi^1(u')$. $\square$

En utilisant cette approche linéaire, nous allons montrer l'existence d'une orbite dense pour l'action de $h_{\mathbb{R}}$ sur $\Omega_h(T^1S)$.

Notons $\widehat{\Gamma}$ (resp. $\widehat{E}(\Gamma)$) l'image réciproque de Γ (resp. $E(\Gamma)$) par la projection de $SL(2,\mathbb{R})$ sur G (resp. de $\mathbb{R}^2_*$ sur E). La figure IV-3 représente $\widehat{E}(\Gamma)$. Soit p l'application de $\mathbb{R}^2_*$ sur $\mathbb{H}(\infty)$ qui à $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ associe $\frac{x}{y}$ si $y \neq 0$ et ∞ sinon. Remarquons que si $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ appartient à $SL(2,\mathbb{R})$ alors :

$$p\left(M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \frac{ap\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + b}{cp\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + d}$$

L'action de projective de $\widehat{\Gamma}$ sur les directions, $D(\Gamma)$, de $\widehat{E}(\Gamma)$ est donc conjuguée à l'action de Γ sur $L(\Gamma)$. Comme $\widehat{\Gamma}$ n'est pas élémentaire, cette action est minimale. Intéressons nous à l'existence d'orbite dense pour l'action de Γ sur $\widehat{E(\Gamma)}$.

Lemme 1.4 *Soient B_1 et B_2 deux disques ouverts de $\mathbb{R}^2_*$ rencontrant $\widehat{E}(\Gamma)$, il existe $\widehat{\gamma}$ dans $\widehat{\Gamma}$ tel que $\widehat{\gamma}B_1 \cap B_2 \neq \phi$.*

Démonstration

Pour $i = 1{,}2$ notons C_i le cône positif ouvert engendré par Bi. Le disque B_1 rencontre $\widehat{E}(\Gamma)$ et l'action projective de $\widehat{\Gamma}$ sur $D(\Gamma)$ est minimale donc il existe un vecteur propre u_1^+ dans B_1 associé au relevé $\widehat{\gamma}_1$ d'une isométrie hyperbolique γ_1 de Γ. On peut supposer : $\widehat{\gamma}_1(u_1^+) = \lambda_1 u_1^+$ avec $\lambda_1 > 1$. Soit γ une isométrie hyperbolique de Γ n'ayant aucun point fixe en commun avec ceux de γ_1. Choisissons un relevé $\widehat{\gamma}$ de γ et deux vecteurs propres u^+, u^- de $\widehat{\gamma}$ tels que $\widehat{\gamma}(u^+) = \lambda u^+$, $\widehat{\gamma}(u^+) = \lambda^{-1}u^-$ avec $|\lambda| > 1$. Quitte à remplacer $\widehat{\gamma}_1$ par $\widehat{\gamma}_1^n$ et u^+,u^- par des vecteurs de $\mathbb{R}^*u^+$,$\mathbb{R}^*u^-$, on peut supposer que $\widehat{\gamma}_1(u^+)$ et $\widehat{\gamma}_1(u^-)$ appartiennent à B_1. Soit $\widehat{\gamma}_2$ dans $\widehat{\Gamma} - <\pm\widehat{\gamma}>$ dont un vecteur propre attractif appartienne à C_2. Quitte à remplacer $\widehat{\gamma}_2$ par $\pm\widehat{\gamma}_2^n$, on peut supposer que $\widehat{\gamma}_2(u^+)$ appartient à C_2. Le segment $[\widehat{\gamma}_2\widehat{\gamma}^n(u^-),\widehat{\gamma}_2\widehat{\gamma}^n(u^+)]$ converge, quand n tend vers $+\infty$, vers la demi-droite, Δ, ouverte d'origine 0 dirigée par $\widehat{\gamma}_2(u^+)$. On peut aussi voir cette droite comme la limite de l'image par $\widehat{\gamma}_2\widehat{\gamma}^n\widehat{\gamma}_1^{-1}$ du segment $[\widehat{\gamma}_1(u^-),\widehat{\gamma}_1(u^+)]$ qui est inclus dans B_1. Comme $\widehat{\gamma}_2(u^+)$ appartient à C_2, la demi-droite Δ rencontre l'ouvert B_2 en un segment non réduit à un point. Il existe donc w dans B_1 et n tels que $\widehat{\gamma}_2\widehat{\gamma}^n\widehat{\gamma}_1^{-1}(w)$ appartienne à B_2. $\square$

Corollaire 1.5 *Il existe un vecteur de $\widehat{E}(\Gamma)$ dont l'orbite sous $\widehat{\Gamma}$ est dense dans $\widehat{E}(\Gamma)$.*

Démonstration

L'idée est la même que celle utilisée pour démontrer le corollaire III-4-2. Soit $(B_n)_{n\geq 1}$ une suite de disques ouverts de $\mathbb{R}^2_*$ ayant chacun une intersection non vide avec $\widehat{E}(\Gamma)$ et telle que tout ouvert de $\mathbb{R}^2_*$ rencontrant $\widehat{E}(\Gamma)$ contienne un disque de cette suite. Fixons un tel ouvert O, d'après le lemme 1.4, il existe $\widehat{\gamma}_1$ dans $\widehat{\Gamma}$ tel que $\widehat{\gamma}_1(O) \cap B_1 \neq \phi$. Soit K un ouvert relativement compact rencontrant $\widehat{E}(\Gamma)$, inclus dans O, tel que $\widehat{\gamma}_1(K_1)$ soit inclus dans B_1. Remplaçons dans le raisonnement précédent O par K_1 et B_1 par B_2, on obtient $\widehat{\gamma}_2 \in \widehat{\Gamma}$ et un ouvert relativement compact $K_2 \subset K_1$ rencontrant $\widehat{E}(\Gamma)$ tel que : $\widehat{\gamma}_2 K_2 \subset B_2$. On construit ainsi une suite $(\widehat{\gamma})_{n\geq 1}$ dans $\widehat{\Gamma}$ et une suite $(K_n)_{n\geq 1}$ d'ouverts rencontrant $\widehat{E}(\Gamma)$, relativement compacts, emboîtés telles que : $\widehat{\gamma}_n(K_n) \subset B_n$. Soit x dans $\bigcap_{n=1}^{+\infty} K_n \cap \widehat{E}(\Gamma)$, pour tout $n \geq 1$, $\widehat{\gamma}_n(x)$ appartient à B_n. Considérons un élément quelconque x' de $\widehat{E}(\Gamma)$ et une suite $(D_n)_{n\geq 1}$ de disques centrés en x' dont le rayon converge vers 0. Chaque D_n contient un disque B_{i_n} donc $\widehat{\gamma}_{i_n}(x)$ appartient à D_n. Ceci montre que x' appartient à $\overline{\Gamma x}$ et donc que Γx est dense dans $\widehat{E}(\Gamma)$. $\square$

On déduit de ce corollaire et de la propriété 1.3 (i) le résultat suivant :

Théorème 1.6 *Il existe u dans $\widetilde{\Omega}_h(T^1S)$ tel que* $\overline{h_{\mathbb{R}}(\pi^1(u))} = \Omega_h(T^1S)$.

2 Lecture à l'infini des orbites denses de $h_{\mathbb{R}}$.

Soit u dans $T^1\mathbb{H}$, nous nous proposons de caractériser, en fonction de la façon dont $u(+\infty)$ est approché par $\Gamma(i)$, la propriété de densité de $h_{\mathbb{R}}(\pi^1(u))$ dans $\Omega_h(T^1S)$.

Théorème 2.1 *Soit u dans $T^1\mathbb{H}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) Le point $u(+\infty)$ est un point horocyclique de $L(\Gamma)$.

(ii) L'orbite $h_{\mathbb{R}}(\pi^1(u))$ est dense dans $\Omega_h(T^1S)$.

Démonstration

Nous allons passer par le modèle linéaire.

Démontrer l'équivalence $(i) \Leftrightarrow (ii)$ revient à démontrer l'équivalence suivante : (i') Il existe $(\gamma_n)_{n\geq 1}$ dans Γ tel que $\underset{n\to+\infty}{lim} \|\gamma_n(v(u))\| = 0 \Leftrightarrow$ $(ii')\overline{\Gamma v(u)} = E(\Gamma)$.

L'implication $(ii') \Rightarrow (i')$ est claire.

Démontrons $(i') \Rightarrow (ii')$. Pour commencer plaçons nous dans le cas où $u(+\infty)$ est fixé par une isométrie hyperbolique $\gamma \in \Gamma$. On peut supposer que $\gamma(v(u)) = \pm\lambda v(u)$ avec $0 < \lambda < 1$. D'après le corollaire 1.5, il existe u' dans $T^1\mathbb{H}$ tel que : $\overline{\Gamma v(u')} = E(\Gamma)$. Nous allons montrer que $\overline{\Gamma v(u)}$ contient un élément de $\pm\mathbb{R}_* v(u')$, ce qui entrainera : $\overline{\Gamma v(u)} = E(\Gamma)$. Le point $u'(+\infty)$ appartient à $L(\Gamma)$ qui est minimal, donc il existe $(\gamma_n)_{n\geq 1}$ dans Γ tel que $\underset{n\to+\infty}{lim} \gamma_n(u(+\infty)) = u'(+\infty)$. Soit $(p_n)_{n\geq 1}$ une suite de $\mathbb{Z}$ telle que $(\lambda^{p_n}\|\gamma_n(v(u))\|)_{n\geq 1}$ converge vers un réel $\alpha \neq 0$. Comme $\gamma_n\gamma^{p_n}(v(u)) = \pm\lambda^{p_n}\gamma_n(v(u))$ et $\gamma_n\gamma^{p_n}u(+\infty) = \gamma u(+\infty)$, on a : $\underset{n\to+\infty}{lim} \gamma_n\gamma^{p_n}v(u) = \pm\alpha\dfrac{v(u')}{\|v(u')\|}$. Par conséquent de $\overline{\Gamma v(u)}$ contient un élément de $\mathbb{R}_* v(u')$.

Supposons à présent que $u(+\infty)$ ne soit fixé par aucune isométrie hyperbolique de Γ et soit horocyclique. Montrons que $\overline{\Gamma v(u)}$ contient un vecteur propre, modulo ± 1, d'une isométrie hyperbolique de Γ. Ceci montrera que $\Gamma v(u)$ est dense. Soit γ une isométrie hyperbolique de Γ, la suite $(\gamma^{-n}u(+\infty))_{n\geq 1}$ converge vers γ^-. Considérons une suite $(\gamma_n)_{n\geq 1}$ de Γ telle que $\underset{n\to+\infty}{lim} \|\gamma_n(v(u))\| = 0$. Fixons un relevé w de $v(u)$ sur $\mathbb{R}^2_*$ et des relevés $\widehat{\gamma}$,$\widehat{\gamma}_n$ de γ et γ_n sur $SL(2,\mathbb{R})$. Soient w^+,w^- deux vecteurs propres de $\widehat{\gamma}$ tels que $\widehat{\gamma}w^+ = \lambda w^+$ et $\widehat{\gamma}w^- = \frac{1}{\lambda}w^-$, avec $|\lambda| > 1$. Posons $\widehat{\gamma}_n(w) = a_n w^+ + b_n w^-$. On a $\underset{n\to+\infty}{lim} a_n^2 + b_n^2 = 0$. Par ailleurs $\widehat{\gamma}^{-n}\widehat{\gamma}_n(w) = \frac{a_n}{\lambda^n}w^+ + b_n\lambda^n w^-$ donc, quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que $(\widehat{\gamma}^{-n}\widehat{\gamma}_n(w))_{n\geq 1}$ converge vers βw^- avec $\beta \neq 0$. Par conséquent, $\gamma^{-n}\gamma_n(v(u))_{n\geq 1}$ converge un vecteur propre, modulo ± 1, d'une isométrie hyperbolique de Γ. $\square$

Comme application de ce théorème nous allons démontrer le mélange topologique du flot géodésique sur $\Omega_g(T^1S)$ (Théorème III-4-3). Avant, démontrons une relation fondamentale entre $\tilde{g}_{\mathbb{R}}$ et $\tilde{h}_{\mathbb{R}}$.

Propriété 2.2 *Soient u dans $T^1\mathbb{H}$ et s,t dans $\mathbb{R}$, on a :* $\tilde{g}_t \circ \tilde{h}_s \circ \tilde{g}_{-t}(u) = \tilde{h}_{se^{-t}}(u)$

Démonstration

Puisque l'action de G commute à celle de $\tilde{g}_{\mathbb{R}}$ et de $\tilde{h}_{\mathbb{R}}$, il suffit de démontrer la relation pour $u(+\infty) = \infty$ et $u(0) = i$. On a $\tilde{g}_{-t}u(+\infty) = \infty$ et $\tilde{g}_{-t}u(0) = e^{-t}i$, donc $\tilde{h}_s(\tilde{g}_{-t}u)(+\infty) = \infty$ et $\tilde{h}_s(\tilde{g}_{-t}u)(0) = e^{-t}i + se^{-t}$. Par conséquent $\tilde{g}_t(\tilde{h}_s(\tilde{g}_{-t}(u)))(+\infty) = \infty$ et $\tilde{g}_t(\tilde{h}_s(\tilde{g}_{-1}(u)))(0) = i + e^{-t}s$. $\square$

Théorème 2.3 *Soient O et V deux ouverts de $\Omega_g(T^1S)$. Il existe $T > 0$ tel que pour tout $t \geq T$, $g_t(O) \cap V \neq \phi$*

Démonstration

Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe deux ouverts O et V inclus dans $\Omega_g(T^1S)$ et une suite non bornée $(t_n)_{n\geq 1}$ telle que $O \cap g_{t_n}(V) = \phi$. On peut supposer $\underset{n\to+\infty}{lim} t_n = -\infty$. D'après le théorème III-3.3, il existe $\pi^1(u)$ périodique relativement à $g_{\mathbb{R}}$ appartenant à V. Notons T sa période et posons $t_n = r_nT + s_n$ avec $-r_n \in \mathbb{N}$ et $-T < s_n \leq 0$. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que $(s_n)_{n\geq 1}$ converge vers un réel s. Le point $u(+\infty)$ est horocyclique donc d'après le théorème 2.1 on a : $\overline{h_{\mathbb{R}}(\pi^1(u))} = \Omega_h(T^1S)$. En particulier, il existe t dans $\mathbb{R}$ tel que : $h_t(\pi^1(u))$ appartient à $g_{-s}(O)$. Considérons l'isométrie hyperbolique γ de Γ telle que $u(+\infty) = \gamma^+$ et $\ell(\gamma) = T$. On a $\gamma^n(u) = \tilde{g}_{nT}(u)$. En utilisant cette relation et la propriété 2.2 on obtient l'égalité : $\gamma^{-r_n}\tilde{g}_{-r_nT}(\tilde{h}_t(u)) = \tilde{h}_{te^{r_n}} \circ \tilde{g}_{-2r_nT}(u)$. Cette égalité entraine que $(g_{-r_nT}(h_t(\pi^1(u)))_{n\geq 1}$ converge vers $\pi^1(u)$ et donc que pour n grand $g_{-r_nT-s}(O) \cap V \neq \phi$. Comme $\underset{n\to+\infty}{lim} s_n - s = 0$, on obtient que pour n grand $g_{t_n}V \cap O \neq \phi$, ce qui contredit l'hypothèse de départ. $\square$

3 Finitude géométrique et dynamique de $h_{\mathbb{R}}$.

Rappelons (voir début du chapitre III) que $\pi^1(u)$ n'est pas errant pour le flot $h_{\mathbb{R}}$ si pour tout voisinage V de $\pi^1(u)$ dans T^1S il existe une suite $t_n \longrightarrow +\infty$ telle que $h_{t_n}(V) \cap V \neq \phi$. La proposition suivante justifie la notation $\Omega_h(T^1S)$.

Proposition 3.1 *Soit $u \in T^1\mathbb{H}$, les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) Le point $\pi^1(u)$ n'est pas errant.

(ii) Le point $u(+\infty)$ appartient à $L(\Gamma)$.

Démonstration

(i) $\Rightarrow$ (ii) D'après (i), il existe une suite de voisinages emboîtés, $(V_n)_{n\geq 1}$, de $\pi^1(u)$ et une suite $(t_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}^+$ telle que $\underset{n\to+\infty}{lim} t_n = +\infty$ et $h_{t_n}(V_n) \cap V_n \neq \phi$. Considérons une suite $(\pi^1(u_n))_{n\geq 1}$ de V_n telle que $\underset{n\to+\infty}{lim} \pi^1(u_n) = \pi^1(u)$, $\underset{n\to+\infty}{lim} u_n = u$ et $\underset{n\to+\infty}{lim} h_{t_n}(\pi^1(u_n)) = \pi^1(u)$. Cette dernière limite se traduit sur $T^1\mathbb{H}$ par l'existence d'une suite $(\gamma_n)_{n\geq 1}$ de Γ telle que $\underset{n\to+\infty}{lim} \tilde{h}_{t_n}\gamma_n(u_n) = u$. On a $\underset{n\to+\infty}{lim} \tilde{h}_{t_n}u_n(0) = u(+\infty)$ et $\underset{n\to+\infty}{lim} d(\tilde{h}_{t_n}u_n(0)),\gamma_n^{-1}(u(0)) = 0$ donc $\underset{n\to+\infty}{lim} \gamma_n^{-1}(u(0)) = u(+\infty)$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Soit u_0 dans $T^1\mathbb{H}$ tel que $u_0(+\infty)$ soit horocyclique et n'appartienne pas à $\Gamma u(+\infty)$. D'après le théorème 2.1, il existe une suite non bornée $(t_n)_{n\geq 1}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\underset{n\to+\infty}{lim} h_{t_n}\pi^1(u_0) = \pi^1(u)$. L'ensemble des points non errants est fermé donc $\pi^1(u)$ n'est pas errant. $\square$

L'ensemble $\Omega_h(T^1S)$ correspond donc bien à l'ensemble non errant du flot horocyclique.

Remarquons que si $\pi^1(u)$ est errant alors il est positivement et négativement divergent. En effet supposons qu'il existe $(t_n)_{n\geq 1}$ dans $\mathbb{R}$ non borné et $(\gamma_n)_{n\geq 1}$ dans Γ tels que $\underset{n\to+\infty}{lim} (\gamma_n\tilde{h}_{t_n}(u))_{n\geq 1}$ converge vers $u' \in T^1\mathbb{H}$. On a $\underset{n\to+\infty}{lim} d(\tilde{h}_{t_n}u(0),\gamma_n^{-1}u'(0)) = 0$, or $\underset{n\to+\infty}{lim} \tilde{h}_{t_n}u(0) = u(+\infty)$ donc $u(+\infty)$ appartient à $L(\Gamma)$, ce qui est contradictoire.

Parmi les points non errants, non denses dans $\Omega_h(T^1S)$, intéressons nous aux points périodiques. Supposons qu'il existe $T > 0$ et γ dans G tels que $\tilde{h}_T(u) = \gamma(u)$. Pour tout n dans $\mathbb{Z}^*$, on a $\tilde{h}_{nT}(u) = \gamma^n(u)$. Ceci montre que γ fixe $u(+\infty)$. Par ailleurs $\gamma \neq Id$ et γ n'est pas hyperbolique car $\underset{n\to+\infty}{lim} \gamma^{-n}(u(0)) = u(+\infty)$, donc γ est parabolique. Reciproquement, soient γ une isométrie parabolique de G et u un élément de $T^1\mathbb{H}$ tels que $\gamma(u(+\infty)) = u(+\infty)$. Cette isométrie préserve l'horocycle orienté associé à u donc il existe $T > 0$ tel que $\gamma(u) = \tilde{h}_T(u)$. Nous obtenons la propriété suivante.

Propriété 3.2 *Soient u dans $T^1\mathbb{H}$ et γ dans Γ les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) Il existe $T > 0$ tel que $\tilde{h}_T(u) = \gamma(u)$

(ii) L'isométrie γ est parabolique et fixe $u(+\infty)$.

D'après cette propriété, $\pi^1(u)$ est périodique si et seulement si $u(+\infty)$ est parabolique. Donc $\Omega_h(T^1S)$ contient des éléments périodiques si et seulement si Γ contient des isométries paraboliques. Par exemple si S est compacte ou si Γ est un groupe de Schottky engendré par des isométries hyperboliques, $h_{\mathbb{R}}$ n'a pas d'orbite périodique.

Supposons maintenant qu'il existe un élément périodique $\pi^1(u_0)$ dans T^1S.

Soit $\pi^1(u)$ dans $\Omega_h(T^1S)$, comme $L(\Gamma)$ est un ensemble minimal pour l'action de Γ, il existe $(\gamma_n)_{n\geq 1}$ dans Γ tel que $\lim_{n\to+\infty} \gamma_n(u_0(+\infty)) = u(+\infty)$. Considérons la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ de $T^1\mathbb{H}$ définie par : $u_n(0) = u(0)$ et $u_n(+\infty) = \gamma_n(u_0(+\infty))$, on a : $\lim_{n\to+\infty} u_n = u$ donc $\lim_{n\to+\infty} \pi^1(u_n) = \pi^1(u)$. Ceci montre que $\pi^1(u)$ est approché par une suite d'éléments périodiques. En résumé, nous obtenons la proposition suivante.

Proposition 3.3 *Soit u dans $T^1\mathbb{H}$.*

L'élément $\pi^1(u)$ est périodique relativement à $h_{\mathbb{R}}$ si et seulement si $u(+\infty)$ est parabolique.

Si l'ensemble des éléments périodiques n'est pas vide, il est dense dans $\Omega_h(T^1S)$.

On déduit des théorèmes 2.1, de la proposition 3.3 et de la proposition I-4.6, une caractérisation, en termes de dynamique de $h_{\mathbb{R}}$ sur son ensemble non-errant, de la finitude géométrique d'un groupe fuchsien.

Proposition 3.4 *Un groupe fuchsien Γ non élémentaire est géométriquement fini si et seulement si les orbites de $h_{\mathbb{R}}$ sur $\Omega_h(\Gamma \setminus T^1\mathbb{H})$ sont denses ou périodiques.*

En particulier si Γ ne contient pas d'isométrie parabolique et est géométriquement fini, l'action de $h_{\mathbb{R}}$ sur $\Omega_h(\Gamma \setminus T^1\mathbb{H})$ est minimale (i.e tous ses orbites sont denses). C'est le cas par exemple si Γ est un groupe de Schottky engendré par un nombre fini d'isométries hyperboliques. Soulignons que dans ce cas $\Omega_h(T^1S)$ n'est pas compact, alors que $\Omega_g(T^1S)$ l'est. En traduisant, grâce à la dualité (propriétés 1.2 et 1.3), la proposition précédente en termes linéaires on obtient la proposition suivante.

Proposition 3.5 *Un groupe fuchsien, Γ, non élémentaire est géométriquement fini si et seulement si étant donné x dans $E(\Gamma)$, ou bien $\overline{\Gamma x} = E(\Gamma)$ ou bien x est fixé par une isométrie parabolique de Γ (et dans ce cas Γx est discret).*

Le seul point à démontrer est la discrétude. Pour cela montrons plus généralement que pour tout x dans E si $F = \Gamma x$ est fermé alors F est discret. Raisonnons par l'absurde. Le groupe G agit transitivement sur E donc si F n'est pas discret, il existe une suite non stationnaire $(\gamma_n x)_{n\geq 1}$ dans F convergeant vers x. Par conséquent $\{x\}$ est un fermé de F d'intérieur vide et donc F est une réunion dénombrable de fermés d'intérieur vide. Par ailleurs, il existe $t > 0$ tel que $\|\gamma(x)\| \geq t$ pour tout γ dans Γ car si ce n'était pas le cas, d'après les propriétés 1.2 et 1.3, on aurait $\bar{F} = E(\Gamma)$. L'ensemble F est donc complet. On en déduit que F est un fermé d'intérieur vide de F, ce qui est faux. On obtient en particulier que si x n'appartient pas à $E(\Gamma)$ alors Γx est discret.

Pour finir, remarquons que, d'après la proposition 3.5, la propriété III-2.6 et la proposition I-4.6, le groupe Γ est un réseau uniforme si et seulement si son action linéaire sur E est minimale.

Commentaires

Dans les articles de E. Ghys ([G]) et de A. Starkov ([St_1]), le lecteur trouvera deux survols sur la dynamique du flot horocyclique sur les quotients de $\mathbb{H}$ par des groupes fuchsiens.

La notion de flot horocyclique se généralise aux surfaces de Hadamard. Lorsque la dimension de la variété est > 2, cette notion est remplacée par la notion de feuilletage horosphérique ([D2]).

Concernant l'existence d'orbites denses (paragraphe 2), dans le cas du feuilletage horosphérique sur les quotients de variétés de Hadamard, cette question est encore largement ouverte et est équivalente à la densité du spectre des longueurs (voir commentaires chapitre III) ([D2], [F]).

L'aspect métrique n'a pas été abordé, comme par exemple l'existence de mesures finies invariantes ergodiques. Les principaux résultats sur ce vaste sujet se trouvent dans les articles ([G]), ([B]), ([Ra]), ([Ro]).

Chapitre VI

Actions linéaires des groupes lorentziens.

Nous munissons $\mathbb{R}^3$ de la forme bilinéaire de Lorentz $b(x,x') = x_1x'_1 + x_2x'_2 - x_3x'_3$. Notons $0(2,1)$ le groupe orthogonal associé à b et $0^0(2,1)$ sa composante connexe en l'identité.

Le groupe $0^0(2,1)$ préserve chaque ligne de niveau, $\mathcal{H}_t = \{x \in \mathbb{R}^3 / b(x,x) = t\}$, de b. Lorsque t est strictement négatif, $\mathcal{H}_t$ a deux composante connexes, $\mathcal{H}_t^+ = \mathcal{H}_t \cap \{x \in \mathbb{R}^3/x_3 > 0\}$ et $\mathcal{H}_t^- = \mathcal{H}_t \cap \{x \in \mathbb{R}^3/x_3 < 0\}$, fixées chacune par $0^0(2,1)$. Lorsque t est nul, $\mathcal{H}_0$ est le cône de lumière et $\mathcal{H}_0 - \{0\}$ a deux composantes connexes : $\mathcal{H}_0^{+*} = \mathcal{H}_0 \cap \{x \in \mathbb{R}^3/x_3 > 0\}$ et $\mathcal{H}_0^{-*} = \mathcal{H}_0 \cap \{x \in \mathbb{R}^3/x_3 < 0\}$. Chacune de ces composantes est préservées par $0^0(2,1)$. Lorsque t est positif, $\mathcal{H}_t$ est connexe.

Nous appelons **groupe lorentzien**, un sous-groupe discret de $0^0(2,1)$. Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la dynamique d'un tel groupe en restriction aux lignes de niveau de b. Pour cela, nous lui associons une surface hyperbolique S et nous relions ces actions linéaires à l'action des flots horocyclique et géodésique sur T^1S.

Soient x dans $\mathbb{R}^3$ et f dans $0^0(2,1)$, nous notons $\|x\|$ la norme euclidienne de x et $\|f\| = \underset{x \neq 0}{Sup} \dfrac{\|f(x)\|}{\|x\|}$.

1 Actions sur $\mathcal{H}_{-1}^{+}$ et sur le cône de lumière projectif.

Considérons la projection stéréographique P de $\mathcal{H}_{-1}^{+}$ sur $\mathbb{D} = \{y \in \mathbb{R}^2 \times \{0\} / \|y\| = 1\}$ dans qui à x associe le point d'intersection de la droite passant par x et par le sommet $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{H}_{-1}^{-}$,avec $\mathbb{D}$.

Cette application est un difféomorphisme dont l'expression analytique est : $P(x_1,x_2,t) = (\frac{x_1}{1+t},\frac{x_2}{1+t},0)$. Notons g^L la métique sur $\mathcal{H}_{-1}^{+}$ obtenue par transport par P^{-1}, de la métrique hyperbolique g sur $\mathbb{D}$. Soient $x = (x_1,x_2,t)$ dans $\mathcal{H}_{-1}^{+}$ et v,v' dans $T_x\ \mathcal{H}_{-1}^{+}$, par définition on a :

$$g_x^L(v,v') = \frac{4}{(1 - \|P(x)\|^2)^2} < T_xP(v),T_xP(v') > .$$

Après calcul, on obtient : $g_x^L(v,v') = b(v,v')$

On déduit de cette relation que g^L est invariante par le groupe $0^0(2,1)$. Par ailleurs, $O^0(2,1)$ conserve l'orientation donc $PO^0(2,1)P^{-1}$ est inclus dans G. Ces deux groupes étant deux groupes de Lie connexes de même dimension, on a $PO^0(2,1)P^{-1} = G$.

L'hyperboloïde $\mathcal{H}_{-1}^{+}$ munie de la restriction de b sur chaque plan tangent est donc une surface riemannienne isométrique à $(\mathbb{D},g)$ et son groupe d'isométries directes est $O^0(2,1)$. L'application P^{-1} se prolonge au cercle $\mathbb{D}(\infty) = \{y \in \mathbb{R}^2 \times \{0\} / \|y\| = 1\}$ en une fonction, encore notée P^{-1}, de

$\mathbb{D}(\infty)$ sur l'espace des droites du cône de lumière $\mathbb{P}(\mathcal{H}_0)$ qui à y dans $\mathbb{D}(\infty)$ associe la droite du cône de lumière parallèle à la droite passant par y et par $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

L'action de G sur $\mathbb{D}(\infty)$ est alors conjuguée par P^{-1} à l'action projective de $O^0(2,1)$ sur $\mathbb{P}(\mathcal{H}_0)$.

On dira que f dans $O^0(2,1)$ est **elliptique**, **parabolique**, ou **hyperbolique**, si PfP^{-1} l'est.

Fixons $x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{H}^+_{-1}$ et les droites $D_0 = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $D_1 = \mathbb{R}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans $\mathbb{P}(\mathcal{H}_0)$. Notons A (resp. N) le groupe des éléments hyperboliques (resp. paraboliques) de $O^0(2,1)$ fixant D_0 et D_1 (resp. D_0), et K le groupe des éléments elliptiques de $O^0(2,1)$ fixant x_0. Soit $t \in \mathbb{R}$, posons

$$a_t = \begin{pmatrix} cht & 0 & sht \\ 0 & 1 & 0 \\ sht & 0 & cht \end{pmatrix}, n_t = \begin{pmatrix} 1-\frac{t^2}{2} & t & \frac{t^2}{2} \\ -t & 1 & t \\ -\frac{t^2}{2} & t & \frac{t^2}{2}+1 \end{pmatrix}, k_t = \begin{pmatrix} cost & -sint & 0 \\ sint & cost & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Il résulte d'un calcul que $A = \{a_t/t \in \mathbb{R}\}$, $N = \{n_t/t \in \mathbb{R}\}$ et $K = \{k_t/t \in [0,2\pi[\}$.

Le groupe $O^0(2,1)$ agit simplement transitivement sur le fibré unitaire, $T^1\mathcal{H}^+_{-1}$ de $\mathcal{H}^+_{-1}$. Notons encore $(\tilde{g}_t)_{t\in\mathbb{R}}$ et $(\tilde{h}_t)_{t\in\mathbb{R}}$ le flot géodésique et horocyclique sur $T^1\mathcal{H}^+_{-1}$. Soit F le difféomorphisme de $O^0(2,1)$ sur $T^1\mathcal{H}^+_{-1}$ qui à f dans $O^0(2,1)$ associe $\left(f(x_0),f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)$. L'action de $\tilde{g}_{\mathbb{R}}$ et $\tilde{h}_{\mathbb{R}}$ sur $T^1\mathcal{H}^+_{-1}$ est conjuguée par F respectivement à l'action de A et N par translation à droite. On a donc : $F(fa_t) = \tilde{g}_t(F(f))$ et $F(fn_t) = \tilde{h}_t(F(f))$.

Soit Γ_L un groupe lorentzien, on dira que Γ_L est **élémentaire** si son groupe fuchsien associé : $\Gamma_F = P\Gamma_L P^{-1}$ l'est.

Fixons un groupe lorentzien Γ_L **non élémentaire**. L'action de Γ_L sur $\mathcal{H}^+_{-1}$ étant conjuguée par P^{-1} à celle de Γ_F sur $\mathbb{D}$, qui est propre et discontinue, l'orbite de x dans $\mathcal{H}^+_{-1}$ sous Γ_L est discrète au sens où pour tout $r > 0$, l'ensemble $\{\gamma \in \Gamma_L/\|\gamma x\| \leq r\}$ est fini. Ce résultat est encore valable si x appartient à $\mathcal{H}^+_{t<0} \cup \mathcal{H}^-_{t<0}$.

Intéressons-nous à l'action projective de Γ_L sur $\mathbb{P}(\mathcal{H}_0)$. Posons $L(\Gamma_L) = P^{-1}(L(\Gamma_F))$. Cet ensemble est un fermé, invariant par Γ_L de $\mathbb{P}(\mathcal{H}_0)$ qui, puisque Γ_L n'est pas élémentaire, est minimal. Soit D dans $\mathbb{P}(\mathcal{H}^+_{-1})$, on dira que D est **horocyclique**, **conique** ou **parabolique**, relativement Γ_L, si $P(D)$ l'est par rapport à Γ_F. La proposition suivante relie ces différentes approches à l'action linéaire de Γ_L sur $\mathcal{H}_0$.

Proposition 1.1 *Soient D dans $\mathbb{P}(\mathcal{H}_0)$ et y un vecteur directeur de D.*

(i) La droite D est horocyclique relativement à Γ_L si et seulement s'il existe une suite $(\gamma_n)_{n\geq 1}$ de Γ_L telle que : $\lim_{n\to+\infty} \|\gamma_n y\| = 0$.

(ii) La droite D est conique relativement à Γ_L si et seulement s'il existe une suite $(\gamma_n)_{n\geq 1}$ de Γ_L telle que $\lim_{n\to+\infty} \|\gamma_n^{-1}\| = +\infty$ et $(\|\gamma_n^{-1}\|\|\gamma_n y\|)_{n\geq 1}$ est borné.

Démonstration

Soient D dans $\mathbb{P}(\mathcal{H}_0)$ et y,z dans $\mathcal{H}^+_{-1}$, notons $B_D(y,z)$ le cocycle de Busemann défini par : $B_{P(D)}(P(y),P(z))$.

Posons $D_0 = \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $y_0 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ et $x_0 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

(i) Commençons par le cas où $y = y_0$. Soit f dans $0^0(2,1)$. D'après la propriété I-1.2 (ii) cette transformation se décompose en $f = k_t a_{t'} n_{t''}$ avec $k_t \in K$, $a_{t'} \in A$ et $n_{t''} \in N$. On a : $B_{D_0}(x_0,f^{-1}(x_0)) = B_{D_0}(x_0,a_{t'}^{-1}(x_0))$ et $B_{D_0}(x_0,f^{-1}(x_0)) = -t'$. Par ailleurs $\|f(y_0)\| = \sqrt{2}e^{t'}$ donc $\|f(y_0)\| =$

$\|y_0\| e^{-B_{D_0}(x_0,f^{-1}(x_0))}$. Ainsi $\underset{n\to+\infty}{lim} \|\gamma_n(y_0)\| = 0$ si et seulement si $\underset{n\to+\infty}{lim} B_{D_0}(x_0,\gamma_n^{-1}(x_0)) = +\infty$. Ceci démontre l'équivalence (i) dans le cas où $y = y_0$.

Si maintenant y est quelconque, considérons f dans $0^0(2,1)$ tel que : $y = f(y_0)$. On a $\|\gamma_n(y)\| = \|\gamma_n f(y_0)\|$ et donc $\underset{n\to+\infty}{lim} \|\gamma_n(y)\| = 0$ si et seulement si $\underset{n\to+\infty}{lim} B_{D_0}(x_0,f^{-1}\gamma_n^{-1}(x_0)) = +\infty$. L'équivalence (i) se déduit de la relation suivante :

$$(*) \qquad B_{D_0}(x_0,f^{-1}\gamma_n^{-1}(x_0)) = B_{\mathbb{R}y}(f(x_0),x_0) + B_{\mathbb{R}y}(x_0,\gamma_n^{-1}(x_0)).$$

(ii) Notons d_L la distance associée à g^L. Commençons par le cas où $y = y_0$. Soit f dans $0^0(2,1)$. D'après la propriété I-1.2 (iii), cette transformation se décompose en $f = k_t a_{t'} k_{t''}$ avec $k_t,k_{t''} \in K$ et $a_{t'} \in A$. On a $d_L(x_0,f(x_0)) = d_L(x_0,a_{t'}(x_0))$ et $d_L(x_0,f(x_0)) = |t'|$. Par ailleurs $\|f^{-1}\| = e^{|t'|}$ donc $\|f^{-1}\| = e^{d_L(x_0,f(x_0))}$. On déduit de cette remarque et de (i) que $\|\gamma_n y_0\| \|\gamma_n^{-1}\| = \|y_0\| e^{-B_{D_0}(x_0,\gamma_n^{-1}(x_0)) + d_L(x_0,\gamma_n^{-1}(x_0))}$. Par conséquent, les conditions $\underset{n\to+\infty}{lim} \|\gamma_n^{-1}\| = +\infty$ et $(\|\gamma_n y_0\| \|\gamma_n^{-1}\|)_{n\geq 1}$ borné, sont équivalentes à : $\underset{n\to+\infty}{lim} d_L(x_0,\gamma_n^{-1}(x_0)) = +\infty$ et $(-B_{D_0}(x_0,\gamma_n^{-1}(x_0)) + d_L(x_0,\gamma_n^{-1}(x_0)))_{n\geq 1}$ borné. Ces deux dernières conditions caractérisent la conicité (propriété I-3.8). Le cas où y est quelconque se traite ne utilisant la relation (*). □

2 Actions sur $\mathcal{H}_0^\pm$ et $\mathcal{H}_1$.

Le groupe $O^0(2,1)$ agit transitivement sur chaque demi-cône de lumière $\mathcal{H}_0^{+*}$ et $\mathcal{H}_0^{-*}$. Le stabilisateur de $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est N. L'application de $O^0(2,1)/N$ sur $\mathcal{H}_0^+$ qui à fN associe $f(x)$ est un homéomorphisme qui conjugue l'action de $O^0(2,1)$ par translation à gauche sur $O^0(2,1)/N$ à l'action linéaire de $O^0(2,1)$ sur $\mathcal{H}_0^{+*}$. Par ailleurs, comme nous l'avons vu dans le paragraphe précédent, l'action du flot horocyclique sur $T^1\mathcal{H}_{-1}^+$ est conjuguée à l'action par translation à gauche de N sur $0^0(2,1)$. Le demi-cône $\mathcal{H}_0^{+*}$ représente donc l'espace des orbites de ce flot.

Fixons un groupe lorentzien non élémentaire Γ_L dans $0^0(2,1)$ et notons $\mathcal{H}_0^+(\Gamma_L)$ l'ensemble des y dans $\mathcal{H}_0^{+*}$ tels que $\mathbb{R}y$ appartienne à $L(\Gamma_L)$. Cet ensemble est un fermé invariant par Γ_L de $\mathcal{H}_0^{+*}$ qui représente l'espace des orbites de $\tilde{h}_{\mathbb{R}}$ en restriction à l'image réciproque par la projection de $T^1\mathcal{H}_{-1}^+$ sur $\Gamma_L \backslash T^1\mathcal{H}_{-1}^+$, de l'ensemble non errant de $h_{\mathbb{R}}$. La proposition suivante relie la topologie de Γy à la nature de sa direction $\mathbb{R}y$.

Proposition 2.1 *Soit y dans $\mathcal{H}_0^{+*}$:*

(i) Si y n'appartient pas à $\mathcal{H}_0^+(\Gamma_L)$, alors $\Gamma_L(y)$ est discret.

(ii) Si y appartient à $\mathcal{H}_0^+(\Gamma_L)$ et si $\mathbb{R}y$ est parabolique alors $\Gamma_L(y)$ est discret.

(iii) L'orbite $\Gamma_L(y)$ est dense dans $\mathcal{H}_0^+(\Gamma_L)$ si et seulement s'il existe $(\gamma_n)_{n\geq 1}$ dans Γ_L tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|\gamma_n(y)\| = 0$.

Démonstration

(i) et (ii) Considérons une suite $(\gamma_n(y))_{n\geq 1}$ de $\Gamma_L(y)$ convergeant vers un point y' de $\mathcal{H}_0^{+*}$. D'après la démonstration de la proposition 1 (i), la suite $(B_{\mathbb{R}y}(x_0,\gamma_n^{-1}(x_0)))_{n\geq 1}$ converge vers un réel non nul. Si $(\gamma_n)_{n\geq 1}$ n'est pas stationnaire, $\mathbb{R}y$ appartient à $L(\Gamma_L)$. Donc si y n'appartient pas à $\mathcal{H}_0^+(\Gamma_L)$, l'ensemble $\Gamma_L(y)$ est discret.

Si $\mathbb{R}y$ est parabolique, considérons le stabilisateur $P \subset \Gamma_L$ de $\mathbb{R}y$. La suite $(B_{\mathbb{R}y}(x_0,\gamma_n^{-1}(x_0)))_{n\geq 1}$ est bornée donc il existe $r > 0$ et p_n dans P tels que pour tout n: $d_L(x_0,p_n\gamma_n^{-1}(x_0)) \leq r$. Le groupe Γ_L agit propement discontinûment sur $\mathcal{H}_{-1}^+$ donc l'ensemble $\{p_n\gamma_n^{-1}/n \geq 1\}$ est fini. Par ailleurs $p_n(y) = \pm y$ donc $\{\gamma_n(y)/n \geq 1\}$ est fini. En conclusion $\Gamma_L(y)$ est discret.

(iii) Supposons qu'il existe $(\gamma_n)_{n\geq 1}$ dans Γ_L tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|\gamma_n(y)\| = 0$, d'après la proposition 1.1, $\mathbb{R}y$ est horocyclique. Le vecteur y représente l'orbite par le flot horocyclique d'un élément u de $T^1\mathcal{H}_{-1}^+$. D'après le théorème V-2-1, l'orbite sous Γ_L de $\tilde{h}_{\mathbb{R}}(u)$ est dense dans l'ensemble des v dans $T^1\mathcal{H}_{-1}^+$ tels que $v(+\infty)$ appartienne à $L(\Gamma_L)$, donc $\overline{\Gamma_L(y)} = \mathcal{H}_0^+(\Gamma_L)$.

La réciproque est claire. □

Intéressons-nous à présent à l'action de Γ_L sur $\mathcal{H}_1$.

Le groupe $0^0(2,1)$ agit transitivement sur $\mathcal{H}_1$ et le stabilisateur de $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est le groupe A. L'application de $0^0(2,1)/A$, c'est-à-dire de l'espace des orbites du flot géodésique sur $T^1\mathcal{H}_{-1}^+$, sur $\mathcal{H}_1$, qui à $fA \in 0^0(2,1)/A$ associe $f(x)$ est donc un homéomorphisme qui conjugue l'action de $0^0(2,1)$ sur les orbites de $\tilde{g}_{\mathbb{R}}$ à son action linéaire sur $\mathcal{H}_1$. Soit y dans $\mathcal{H}_1$, son orthogonal lorentzien est un plan qui rencontre $\mathcal{H}_0$ en deux droites. Notons $u(y)$ et $v(y)$, les vecteurs unitaires (au sens euclidien) de chacune de ces droites, appartenant à $\mathcal{H}_0^+$ et tels que $(y,u(y),v(y))$ soit une base directe.

Considérons un élément w de $T^1\mathcal{H}_{-1}^+$ tel que $w(+\infty) = \mathbb{R}v(y)$ et $w(-\infty) = \mathbb{R}u(y)$, l'orbite de w sous $\tilde{g}_{\mathbb{R}}$ est représentée par y.

Notons $\mathcal{H}_1(\Gamma_L)$, l'ensemble de y dans $\mathcal{H}_1$ tels que $\mathbb{R}u(y)$ et $\mathbb{R}v(y)$ appartiennent à $L(\Gamma_L)$. Cet ensemble est un fermé invariant par Γ_L qui représente l'espace des orbites de $\tilde{g}_{\mathbb{R}}$ sur $\widetilde{\Omega}_g(\Gamma_F \setminus T^1\mathbb{H})$. Un élément y de $\mathcal{H}_1(\Gamma_L)$ est dit **hyperbolique** s'il est fixé par une transformation hyperbolique f de Γ_L. Dans ce cas, $\mathbb{R}v(y)$ et $\mathbb{R}u(y)$ correspondent respectivement aux droites propres attractives et répulsives de f.

Proposition 2.2 *Soit y dans $\mathcal{H}_1$.*

(i) Si $\mathbb{R}u(y)$ et $\mathbb{R}v(y)$ n'appartiennent pas à $L(\Gamma_L)$, alors $\Gamma_L(y)$ est discret.

(ii) Si y est hyperbolique, $\Gamma_L(y)$ est discret.

(iii) On suppose que y n'est pas hyperbolique . L'orbite $\Gamma_L(y)$ admet des points d'accumulation si et seulement s'il existe $(\gamma_n)_{n\geq 1}$ dans Γ_L tel que $\underset{n\to+\infty}{lim} \|\gamma_n^{-1}\| = +\infty$ et $(\|\gamma_n^{-1}\|\|\gamma_n(u(y)\|))_{n\geq 1}$ ou $(\|\gamma_n^{-1}\|\|\gamma_n(v(y))\|)_{n\geq 1}$ est borné.

(iv) L'ensemble des vecteurs hyperboliques de $\mathcal{H}_1(\Gamma_L)$ est dense dans $\mathcal{H}_1(\Gamma_L)$.

(v) Il existe des vecteurs de $\mathcal{H}_1(\Gamma_L)$ dont l'orbite sous Γ_L est dense dans $\mathcal{H}_1(\Gamma_L)$.

Démonstration

(i) Supposons que la suite $(\gamma_n(y))_{n\geq 1}$ soit convergente. Notons α la géodésique de $\mathcal{H}^+_{-1}$ d'extrémités $\mathbb{R}u(y)$ et $\mathbb{R}v(y)$. La suite $(\gamma_n(\alpha))_{n\geq 1}$ converge vers une géodésique, donc pour tout z dans $\mathcal{H}^+_{-1}$, il existe $r > 0$ tel que $d_L(\gamma_n^{-1}(z),\alpha) \leq r$. Les extrémités de α n'appartiennent pas à $L(\Gamma_L)$ donc l'ensemble $\{\gamma_n^{-1}(z)/n \geq 1\}$ est fini. L'action de Γ_L sur $\mathcal{H}^+_{-1}$ étant discontinue, l'ensemble $\{\gamma_n/n \geq 1\}$ est fini et donc $(\gamma_n(y))_{n\geq 1}$ est stationnaire. Ceci montre que Γy est une orbite discrète.

(ii) Supposons que la suite $(\gamma_n(y))_{n\geq 1}$ soit convergente. Soient z un point de la géodésique α incluse dans $\mathcal{H}^+_{-1}$ d'extrémités $\mathbb{R}u(y)$ et $\mathbb{R}v(y)$, et f un élément hyperbolique de Γ_L fixant α. Comme le groupe $< f >$ agit par translation sur α, il existe $(p_n)_{n\geq 1}$ dans $\mathbb{Z}$ tel que $(\gamma_n f^{p_n}(z))_{n\geq 1}$ converge dans $\mathcal{H}^+_{-1}$. L'ensemble $\{\gamma_n f^{p_n}/n \geq 1\}$ est nécessairement fini et $f(y) = y$, donc $(\gamma_n(y))_{n\geq 1}$ est stationnaire. Par conséquent, Γy est une orbite discrète.

(iii) Supposons que y ne soit pas hyperbolique. Soit w un élément de $T^1\mathcal{H}^+_{-1}$ tel que $w(+\infty) = \mathbb{R}v(y)$ et $w(-\infty) = \mathbb{R}u(y)$. L'existence d'une suite non stationnaire convergente de Γy équivaut à l'existence d'une suite non bornée $(t_n)_{n\geq 1}$ de $\mathbb{R}$ et d'une suite $(\gamma_n)_{n\geq 1}$ de Γ telles que $(\tilde{g}_{t_n}\gamma_n(w))_{n\geq 1}$ converge. D'après la proposition III-2-3, cette propriété est équivalente au fait que l'une des droites $\mathbb{R}u(y)$ et $\mathbb{R}v(y)$ soit conique. On conclut en utilisant la proposition 1.1.

(iv) et (v) sont des traductions directes du théorème III-3.3 et du corollaire III-4.2. □

Commentaires

Un des premiers résultats sur les actions linéaires des sous-groupes de SL(n,$\mathbb{R}$) sur $\mathbb{R}^n$ est dû à L. Greenherg ([Gr]). Dans cet article apparaît clairement le lien entre la propriété d'une orbite linéaire de contenir 0 dans son adhérence et sa densité. Cet article a été généralisé par J-P. Conze et Y. Guivarc'h à l'action des groupes linéaires de Schottky (voir [Gu] pour une construction de ces groupes) et des sous-groupes discrets de $O(n,1)$ ([C-G]).

Chapitre VII

Excursions des géodésiques dans les cuspides et approximations diophantiennes.

Commençons par rappeler trois résultats classiques sur les approximations diophantiennes.

Soient x dans $\mathbb{R}$ et $(\frac{p_n}{q_n})_{n\geq 1}$ une suite de rationnels, avec $q_n > 0$ et p_n dans $\mathbb{Z}$, convergeant vers x. Nous nous intéressons à la vitesse de convergence de cette suite en fonction de q_n. Remarquons que pour tout q dans $\mathbb{N}^*$, en prenant l'entier relatif p, égal à la partie entière de qx, on obtient $\mid x - \frac{p}{q} \mid \leq \frac{1}{q}$. Par conséquent, pour tout x, il existe une suite $(\frac{p_n}{q_n})_{n\geq 1}$ de rationnels telle que $\mid x - \frac{p_n}{q_n} \mid \leq \frac{1}{|q_n|}$. Cherchons la "meilleure" fonction (au sens du comportement asymptotique) $f : \mathbb{N} \rightharpoonup \mathbb{R}_+^*$ décroissante vers 0 telle que pour tout x dans $\mathbb{R}$, il existe une suite de rationnels $(\frac{p_n}{q_n})_{n\geq 1}$ vérifiant : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mid q_n \mid= +\infty$ et $\mid x - \frac{p_n}{q_n} \mid \leq f(\mid q_n \mid)$. Le théorème suivant, dû à Dirichlet, est un des premiers résultats classiques sur cette question.

Théorème A. *Soit x dans $\mathbb{R}$, il existe une infinité d'entiers $p_n \in \mathbb{Z}$ et $q_n \in \mathbb{N}^*$ tels que : $\mid x - \frac{p_n}{q_n} \mid \leq \frac{1}{2q_n^2}$.*

Considérons le cas particulier où $x = \sqrt{2}$. Pour tous s dans $\mathbb{Z}$ et q dans $\mathbb{N}^*$, l'inégalité suivante est vérifiée : $\mid \sqrt{2} - \frac{p}{q} \mid \geq \frac{1}{4q^2}$ $(*)$.
En effet, si $\mid \sqrt{2} - \frac{p}{q} \mid \geq 1$, l'inégalité $(*)$ est clairement satisfaite, sinon p est positif et $-1 < \sqrt{2} - \frac{p}{q} < 1$ donc $\mid \sqrt{2} + \frac{p}{q} \mid \leq 4$. Par ailleurs $\mid \sqrt{2} + \frac{p}{q} \mid \mid \sqrt{2} - \frac{p}{q} \mid = \mid 2 - \frac{p^2}{q^2} \mid$ et $\mid 2 - \frac{p^2}{q^2} \mid \geq \frac{1}{4q^2}$ car $\sqrt{2}$ est irrationnel. L'inégalité $(*)$ découle directement de ces remarques. On déduit de cette inégalité que $f(q)$ est asymptotiquement équivalent à $\frac{1}{q^2}$.
A chaque x dans $\mathbb{R}$, on associe le réel $\nu(x)$ défini par :
$\nu(x) = \mathrm{Inf}\ \{c > 0$/il existe une infinité d'entiers $p_n \in \mathbb{Z}$ et $q_n \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $\mid x - \frac{p_n}{q_n} \mid\leq \frac{c}{q_n^2}\}$.
On dit que x est **mal approché** si $\nu(x) > 0$. C'est le cas par exemple de $\sqrt{2}$ car $\nu(\sqrt{2}) \geq \frac{1}{4}$.
Le théorème suivant caractérise les réels mal approchés en termes de développement en fractions continues (voir proposition II.3.3).

Théorème B. *Soient x dans $\mathbb{R}^+ - \mathbb{Q}^+$ et $(n_k)_{k\geq 0}$ son développement en fractions continues. Le réel x est mal approché si et seulement si la suite $(n_k)_{k\geq 0}$ est bornée.*

En particulier, si x est quadratique alors x est mal approché (proposition II.3.5). Dans le cas où x est algébrique de degré quelconque, cette question est ouverte. D'après le théorème A, $\nu(x) \leq \frac{1}{2}$ pour tout x. Le résultat suivant, dû à Hurwitz, affine cette inégalité.

Théorème C.

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \ \nu(x) = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Le but de ce chapitre est de traduire ces trois théorèmes en termes d'excursions de rayons géodésiques sur la surface modulaire $PSL(2{,}\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H}$ et par ce biais, d'en donner une nouvelle démonstration et de les généraliser.

Dans ce qui suit Γ est un groupe fuchsien **géométriquement fini, non élémentaire contenant une translation** $t(z) = z + \alpha$ **avec** $\alpha \neq 0$. Dans ce cas, le point ∞ est un point parabolique de $L(\Gamma)$. On rappelle que Γ_∞ est le stabilisateur de ce point dans Γ et qu'il existe un horodisque fermé $H^+(\infty)$ centré en ∞ tel que : $\gamma\ H^+(\infty) \cap H^+(\infty) = \phi$ pour tout $\gamma \in \Gamma - \Gamma_\infty$ (corollaire I.2.8).

Comme dans les chapitres précédents, π désigne la projection de $\mathbb{H}$ sur la surface $S = \ _\Gamma\backslash^{\mathbb{H}}$ et la cuspide $C(H^+(\infty))$ est la projection de $\Gamma_\infty\backslash H^+(\infty)$ sur S.

1 Géométrisation du théorème A.

Commençons par analyser l'image par Γ des horocycles basés en ∞.

Soit $t > 0$, posons $H_t = \{x + it{,}x \in \mathbb{R}\}$. L'image de H_t par une isométrie $g(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ avec $ad - bc = 1$ et $c \geq 0$ est soit la droite H_t si $c = 0$, soit un cercle de $\mathbb{H}$ tangent à l'axe des réels. On note $c = c(g)$. On rappelle (lemme I.2.7) que si $c(g) \neq 0$, l'horocycle $g(H_t)$ est un cercle tangent à l'axe réel en $g(\infty) = \frac{a}{c(g)}$ et dont le rayon euclidien est $\frac{1}{2tc^2(g)}$.

Fixons un horocycle H_{t_0} vérifiant $\gamma\ H_{t_0} \cap H_{t_0} = \phi$ pour tout γ dans $\Gamma - \Gamma_\infty$. On a l'équivalence suivante pour tout γ dans $\Gamma - \Gamma_\infty$:

(1) $\quad (\infty\ x)\ \cap\ \gamma\ H_{t_0} \neq \phi \iff |\ x - \gamma(\infty)\ | \leq \frac{1}{2t_0\ c^2(\gamma)}$.

Interprétons la quantité : $\frac{1}{2t_0\ c^2(\gamma)}$ sur la surface S.

Pour cela considérons la géodésique $(\infty\ \gamma(\infty))$. Notons z et z' les points d'intersection de $(\infty\ \gamma(\infty))$ avec H_{t_0} et $\gamma(H_{t_0})$.

Comme $\gamma(H_{t_0}) \cap H_{t_0} = \phi$ on a : $d(z,z') = B_\infty(z,z')$. Par ailleurs, $Imz' = \frac{1}{t_0\ c^2(\gamma)}$ donc $Ln\ t_0^2\ \ c^2(\gamma) = d(z,z')$.
Soit $r :]-\infty, +\infty [\rightarrow \mathbb{H}$ le paramétrage par longueur d'arc de la géodésique orientée $(\infty\ \gamma(\infty))$ tel que $r(0) = z$. Pour tout $s \leq 0$, le point $r(s)$ appartient à l'horodisque $H^+_{t_0}$ et pour tout $s \geq Ln\ t_0^2\ c^2(\gamma)$, le point $r(s)$ appartient à $H^+_{t_0}$. Par conséquent, $Ln(t_0^2\ c^2(\gamma))$ représente la longueur du segment géodésique inclus dans $\pi((\infty\ \gamma(\infty)))$ compris entre le premier point $\pi(r(0))$ rencontrant $\pi(H_{t_0})$ et le dernier. Cette quantité est appelée **profondeur** de la géodésique $\pi((\infty\ \gamma(\infty)))$ dans la cuspide $C(H^+(\infty))$.

Soit γ dans Γ, remarquons que pour tous n et m de $\mathbb{Z}$, on a : $c(\gamma) = c(t^n\ \gamma\ t^m)$. La fonction c est donc constante sur l'espace des doubles classes $\Gamma_\infty \backslash \Gamma / \Gamma_\infty$.
D'après la propriété I.2.6(i), si $(\dot{\gamma}_n)_{n\geq 1}$ est une suite de $\Gamma_\infty \backslash \Gamma / \Gamma_\infty$ contenant une infinité de termes différents, alors $c(\gamma_n))_{n\geq 1}$ n'est pas borné.

On déduit de cette propriété et de l'équivalence (1), la caractérisation suivante :

Proposition 1.1 *Soient x dans $\mathbb{R}$ et $(r(s))_{s\in\mathbb{R}}$ un paramétrage par longueur d'arcs de la géodésique orientée $(\infty\ x)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) Il existe une suite $(s_n)_{n\geq 1}$ non bornée de $\mathbb{R}^+$ telle que $\pi(r(s_n))$ appartienne à $\pi(H_{t_0})$.

(ii) Il existe une suite $(\gamma_n)_{n\geq 1}$ de Γ telle que $(c(\gamma_n))_{n\geq 1}$ ne soit pas borné et $\mid x - \gamma_n(\infty) \mid \leq\ \frac{1}{2\ t_0\ c^2(\gamma_n)}$.

Démonstration.

(i) $\Rightarrow$ (ii). Le fait que $\pi(r(s_n))$ appartienne à $\pi(H_{t_0})$ se traduit sur $\mathbb{H}$ par l'existence de γ_n dans Γ tel que : $r(s_n) \in\ \gamma_n(H_{t_0})$. Puisque $(s_n)_{n\geq 1}$ n'est pas

borné, quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que $(\gamma_n(H_{t_0}))_{n\geq 1}$ est une suite de cercles tous différents rencontrant la géodésique $(\infty\ x)$. Donc $(\dot{\gamma}_n)_{n\geq 1}$ est une suite de termes différents de $\Gamma_\infty\backslash\Gamma/\Gamma_\infty$ et la suite $(c(\gamma_n))_{n\geq 1}$ n'est pas bornée. Par ailleurs, l'appartenance de $r(s_n)$ à $\gamma_n(H_t)$ se traduit par l'inégalité $\mid x-\gamma_n(\infty)\mid\leq\frac{1}{2\ t_0\ c^2(\gamma_n)}$.
(ii) $\Rightarrow$ (i). La suite $(\gamma_n(H_{t_0}))_{n\geq 1}$ est une suite de cercles de rayon euclidien $r_n=\frac{1}{2\ t_0\ c^2(\gamma_n)}$, tangents à l'axe réel en $\gamma_n(\infty)$. Puisque $(c(\gamma_n))_{n\geq 1}$ n'est pas borné, quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que $(r_n)_{n\geq 1}$ converge vers 0. L'inégalité $\mid x-\gamma_n(\infty)\mid\leq\frac{1}{2\ t_0\ c^2(\gamma_n)}$ traduit le fait que $(\infty\ x)$ rencontre $\gamma_n(H_{t_0})$. Soit s_n le plus grand des réels tel que $r(s)$ appartienne à $\gamma_n(H_{t_0})$. La suite $(r_n)_{n\geq 1}$ converge vers 0 donc $\lim_{n\to+\infty} s_n=+\infty$. □

On est maintenant en mesure de démontrer le théorème suivant qui est une généralisation du théorème A énoncé dns l'introduction.

Théorème A géométrique 1.2 *Il existe $t_0>0$ tel que pour tout x dans $L_c(\Gamma)$, il existe une suite $(\gamma_n)_{n\geq 1}$ de Γ vérifiant : $\lim_{n\to+\infty} c(\gamma_n)=+\infty$ et $\mid x-\gamma_n(\infty)\mid\leq\frac{1}{2\ t_0\ c_n^2(\gamma)}$.*

Démonstration.

Fixons un paramétrage par longueurs d'arcs $r:\mathbb{R}\to(\infty\ x)$. Le groupe Γ étant géométriquement fini, il existe un compact $K\subset S$ tel que l'ensemble des $s>0$ pour lesquels $\pi(r(s))$ appartient à K ne soit pas borné (proposition III.2.4(i)).

Soit $(s_n)_{n\geq 1}$ une suite de $\mathbb{R}_*^+$ vérifiant : $\lim_{n\to+\infty} s_n=+\infty$ et $\pi(r(s_n))\in K$. Considérons un relevé $\tilde{K}$ de K sur $\mathbb{H}$ et $t>0$ tel que $\tilde{K}$ soit inclus dans l'horodisque H_t^+. Pour tout n, il existe γ_n dans Γ vérifiant : $\gamma_n(r(s_n))\in\tilde{K}$. La géodésique $\gamma_n(\infty\ x)$ rencontre l'horocycle H_t (en au plus 2 points). Choisissons un point, $\gamma_n(r(t_n))$, de H_t. Puisque $\gamma_n(\infty\ x)$ rencontre $\tilde{K}$, on peut supposer que la suite $(\gamma_n(r(t_n)))_{n\geq 1}$ converge dans $\mathbb{H}$. Par conséquent, la suite $(\mid s_n-t_n\mid)_{n\geq 1}$ est uniformément bornée et donc $\lim_{n\to+\infty} t_n=+\infty$. On déduit alors de la proposition 1.1 l'existence d'une suite $(g_n)_{n\geq 1}$ dans Γ telle que $\lim_{n\to+\infty} c(g_n)=+\infty$ et $\mid x-g_n(\infty)\mid\leq\frac{1}{2\ t\ c^2(g_n)}$. □

Retrouvons à présent le théorème A énoncé dans l'introduction.
Pour cela, il suffit d'analyser le cas où $\Gamma=PSL(2,\mathbb{Z})$. D'après la proposition II.2.3, $L_c(PSL(2,\mathbb{Z}))=\mathbb{R}-\mathbb{Q}$. Montrons que pour tout x irrationnel, il existe une suite $(t_n)_{n\geq 1}$ dans $\mathbb{R}_*^+$ non bornée, telle que : $\pi(r(t_n))\in\pi(H_1)$, où $(r(s))_{s\in\mathbb{R}}$ est un paramètrage par longueur d'arcs de $(\infty\ x)$. Le théorème découlera alors de la proposition 1.1 et du fait que si $\gamma(z)=\frac{az+b}{cz+d}$ appartient à $PSL(2,\mathbb{Z})$ et n'est pas une translation, $\gamma(\infty)$ est le rationnel $\frac{a}{c(\gamma)}$.

Supposons que ce ne soit pas le cas, il existe un irrationnel x et z dans $(\infty\ x)$ tels que : $\pi([z,x)) \cap \pi(H_1) = \phi$. On rappelle (corollaire II.2.2) que l'ensemble $\Delta = \{z \in \mathbb{H} \ / \mid z \mid \geq 1, \mid z-1 \mid \geq 1{,}0 \leq Re\ z \leq 1\}$ est un domaine fondamental de $PSL(2,\mathbb{Z})$. Posons $B = \Delta \cap \{z \in \mathbb{H} \ / \ Im\ z \geq 1\}$ et $r(z) = \frac{z-1}{z}$. Puisque x est irrationnel et $\pi([z,\, x)) \cap \pi(H_1) = \phi$, il existe γ dans $PSL(2,\mathbb{Z})$ tel que $[\gamma(z),\, \gamma(x))$ soit inclus dans $E\ \cup\ r\ E\ \cup\ r^2\ E$. Ceci est impossible car $E\ \cup\ r\ E\ \cup\ r^2\ E$ est borné.

2 Hauteurs et constantes de Hurwitz.

Soient x, x^- deux points différents de $\mathbb{H}(\infty)$ et $r :]-\infty,\, +\infty[\ \rightarrow\ (x^-\ x)$ un paramétrage par longueur d'arcs de la géodésique $(x^-\ x)$. On associe à $\pi(x^-\ x)$ **sa hauteur pour des temps positifs** relativement à la surface S, notée $h_S(x^-\ x)$, définie comme la borne supérieure de l'ensemble des $t > 0$ pour lesquels il existe une suite non bornée $(t_n)_{n\geq 1}$ dans $\mathbb{R}^+$ telle que : $\pi(r(t_n)) \in \pi(H_t)$. Avec pour convention : $h_S(x^-\ x^+) = +\infty$ si cet ensemble n'est pas borné et $h_S(x^-\ x^+) = 0$ s'il est vide.
D'après le théorème 1.2, il existe $t_0 > 0$ tel que $h_S(\infty\ x) \geq t_0$ pour tout x dans $_c(\Gamma)$. En revanche, si x n'appartient pas à $L_c(\Gamma)$, et si u est un élément de $T^1\mathbb{H}$ tel que : $u(+\infty) = x$, d'après la proposition III.2.1, $\pi^1(u)$ n'est pas positivement convergent et donc $h_S(x^-x) = 0$.

Propriété 2.1 *Soient x et x^- deux points différents de $\mathbb{H}(\infty)$. La hauteur $h_S(x^-x)$ est indépendante de x^-, on la note $h_S(x)$.*

Démonstration.

Il suffit de démontrer cette propriété pour x dans $L^c(\Gamma)$. Soit $r :]-\infty,+\infty[\ \longrightarrow\ (\infty\ x)$ un paramètrage par longueur d'arcs de $(\infty\ x)$. Fixons un réel $t > 0$ pour lequel il existe une suite $(t_n)_{n\geq 1}$ non bornée de $\mathbb{R}^+$ telle que : $\pi(r(t_n)) \in \pi(H_t)$. Pour chaque $n \geq 1$, il existe donc γ_n dans $\Gamma - \Gamma_\infty$ tel que :

$B_\infty(i,\gamma_n\ r(t_n)) = t$. Considérons un paramétrage par longueur d'arcs r' : $]-\infty,+\infty[\longrightarrow (x^-\ x)$ de la géodésique $(x^-\ x)$. Fixons $\epsilon > 0$, les géodésiques $(x^-\ x)$ et $(\infty\ x)$ étant asymptotes, pour A grand, le rayon $r'([A,+\infty))$ est inclus dans le ϵ-voisinage de $(\infty\ x)$. Pour n suffisamment grand, il existe donc $s_n > 0$ tel que $d(r'(s_n),r(t_n)) \leq \epsilon$. En utilisant l'encadrement suivant : $-d(z,z') \leq B_\infty(z,z') \leq d(z,z')$, on obtient :

$$t - \epsilon \leq B_\infty(i,\gamma_n(r'(s_n))) \leq t + \epsilon.$$

Ceci montre que $\gamma_n(r'(s_n))$ appartient à l'horodisque $H^+_{t-\epsilon}$. Puisque x est conique, cette propriété entraîne l'existence de $s'_n \geq s_n$ tel que : $\gamma_n(r'(s'_n)) \in H_{t-\epsilon}$. Par conséquent $h_S(x^-\ x) \geq t - \epsilon$ pour tout $\epsilon > 0$ et donc $h_S(x^-\ x) \geq h_S(\infty\ x)$.

En reprenant le même raisonnement et en échangeant le rôle de x^- et de ∞, on obtient $h_S(\infty\ x) \geq h_S(x^-\ x)$. $\square$

Soit γ dans Γ, par définition de la hauteur, $h_S(\gamma(x^-)\gamma(x)) = h_S(x^-x)$ donc $h_S(x) = h_S(\gamma(x))$.

On dit que x dans $\mathbb{H}(\infty)$ est **géométriquement mal approché** si $h_S(x)$ est un réel non nul. Un tel x est nécessairement un point conique.

Propriété 2.2 *Soit x dans $L_c(\Gamma)$.*

(i) S'il existe z dans $(\infty\ x)$ tel que $\pi([z,x))$ soit borné alors x est géométriquement mal approché.

(ii) Si $L(\Gamma) = L_c(\Gamma) \cup \Gamma(\infty)$ et si x est géométriquement mal approché alors il existe z dans $(\infty\ x)$ tel que $\pi([z,x))$ soit borné.

Démonstration.

(i) Puisque $\pi([z,x))$ est borné, il existe $t > 0$ tel que $\pi([z,x))$ soit inclus dans S privé de la cuspide associée à H_t^+. Par conséquent : $[z,x) \cap \Gamma(H_t) = \phi$, ce qui montre que $h_S(x)$ est fini (et non nul car x est conique).

(ii) Soit $t > h_S(x)$, il existe z dans $(\infty\ x)$ tel que : $\pi([z,x)) \cap \pi(H_t) = \phi$. Le rayon $\pi([z,x))$ est inclus dans $\pi(\tilde{\Omega}(\Gamma))$ privé de son intersection avec la cuspide associée à H_t^+. La surface S est géométriquement finie et $L_p(\Gamma) = \Gamma_\infty$, donc, d'après la proposition I.4.5, cet ensemble est compact. Par conséquent, $\pi([z,x))$ est borné. □

D'après la propriété (i) précédente, si $x = \gamma^+$ où γ est une isométrie hyperbolique de Γ, alors x est mal approché car $\pi((\gamma^-\gamma^+))$ est compact. Remarquons, de plus, que : $h_S(\gamma^+) = \lim\limits_{g \in \Gamma} \dfrac{\mid g(\gamma^+) - g(\gamma^-) \mid}{2}$.

Etudions à présent les cas particuliers des groupes de Schottky.

Considérons un groupe de Schottky $\Gamma = S(p,h)$ inclus dans $PSL(2,\mathbb{R})$ où p est une translation non triviale et h est une isométrie hyperbolique. D'après II.1, Γ est géométriquement fini et $L(\Gamma) - L_c(\Gamma) = \Gamma(\infty)$. Soit x dans $L_c(\Gamma)$, on rappelle qu'il existe une unique suite réduite $s(x) = (s_i)_{i \geq 1}$ avec $s_i \in \{p^{\pm 1}, h^{\pm 1}\}$ et $s_i \neq s_{i+1}^{-1}$ telle que : $\lim\limits_{n \to +\infty} s_1 ... s_n(z) = x$ pour tout $z \in \mathcal{D}\ (S(p,h))$ (proposition II.1.10).

Caractérisons en termes de codage les points géométriquement mal approchés de $L_c(\Gamma)$.

Proposition 2.3 *Soit x dans $L_c(\Gamma)$, posons $s(x) = (s_i)_{i \geq 1}$.*
Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) Le point x est géométriquement mal approché.

(ii) Il existe un entier $r > 0$ tel que si $s_i \in \{p^{\pm 1}\}$ alors il existe $1 \leq j \leq r$ tel que $s_{i+j} \in \{h^{\pm 1}\}$.

Démonstration.
non (ii) ⇒ non (i). Soit $(a_i)_{i \geq 1}$, la suite de $\{p^{\mathbb{Z}^*}, h^{\pm 1}\}$ construite à partir de $s(x)$ en regroupant les puissances consécutives de p et de p^{-1}. Une telle suite vérifie : $a_i \neq a_{i+1}^{-1}$, si $a_i \in p^{\mathbb{Z}^*}$ alors $a_{i+1} \in \{h^{\pm 1}\}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} a_1 ... a_n(z) = x$ pour tout $z \in D(\Gamma)$. Supposons qu'il existe une sous-suite $(a_{i_k})_{k \geq 1}$ de $(a_i)_{i \geq 1}$, telle que $a_{i_k} = p^{r_k}$ avec $\lim\limits_{k \to +\infty} \mid r_k \mid = +\infty$. Posons $\gamma_k = a_1 ... a_{i_k}$. Soit z appartenant à $(\infty\ x) \cap\ D(\Gamma)$, on a $\lim\limits_{k \to +\infty} \gamma_k^{-1}(z) = \infty$. Par ailleurs $\gamma_k^{-1}(x)$ appartient à $D(h) \cup D(h^{-1})$, donc pour tout $t > 0$, il existe $n > 0$ tel que : $[\gamma_n^{-1}(z), \gamma_n^{-1}(x)) \cap H_t \neq \phi$. Ceci montre que $\pi([z,x))$ n'est pas borné et donc,

d'après la propriété 2.2(ii), que x n'est pas géométriquement mal approché.

non (i) $\Rightarrow$ non (ii). Supposons que x ne soit pas géométriquement mal approché. Soit z sur $(\infty\ x)$ d'après la propriété 2.2(ii), le rayon $\pi([z,x))$ n'est pas borné. Il existe donc une suite $t_n \to +\infty$ et $(\gamma_n)_{n\geq 1}$ dans Γ telles que : $\gamma_n([z,x)) \cap H_{t_n} \neq \phi$. On peut supposer que γ_n n'appartient pas à Γ_∞ pour tout $n \geq 1$. Les géodésiques $(\gamma_n(\infty\ x))_{n\geq 1}$ sont donc des demi-cercles et la suite de leurs rayons euclidiens tend vers $+\infty$. On a donc $\lim_{n\to+\infty} \mid \gamma_n(\infty) - \gamma_n(x) \mid = +\infty$. L'alphabet $\{p^{\pm 1},h^{\pm 1}\}$ étant fini, quitte à extraire une sous-suite de $(\gamma_n)_{n\geq 1}$, on peut supposer que $\gamma_n = c_1...c_{l_n}$ avec : $c_i \in \{p^{\pm 1},h^{\pm 1}\}, c_{i+1} \neq c_i^{-1}$ et $(\ell_n)_{n\geq 1}$ strictement croissante. Soit k_0 le plus petit $k \geq 1$ tel que c_{k_0} appartienne à $\{h^{\pm 1}\}$. On peut supposer que $k_0 = 1$. Les points $\gamma_n(\infty)$ appartiennent donc à $(D(h)\cup D(h^{-1}))\cap \mathbb{H}(\infty)$ qui est compact. Puisque $\lim_{k\to+\infty} \mid \gamma_n(\infty) - \gamma_n(x) \mid = +\infty$ nécessairement : $\lim_{n\to+\infty} \gamma_n(x) = \infty$. On a $z = \lim_{k\to+\infty} s_1...s_k(z)$ avec z dans $D(\Gamma)$. Supposons qu'il existe une sous-suite $(\gamma_{n_p})_{p\geq 1}$ telle que : $\gamma_{n_p}^{-1} \neq s_1...s_{l_{n_p}}$. Dans ce cas $\gamma_{n_p}(x)$ appartient à $D(h)\cup D(h^{-1})$ et donc $(\gamma_{n_p}(x))_{p\geq 1}$ ne converge pas vers ∞, ce qui est contradictoire. Par conséquent il existe $N_1 > 0$ tel que $\gamma_n^{-1} = s_1...s_{l_n}$ pour tout $n \geq N_1$. Ainsi $\gamma_n(x)$ appartient à $D(s_{\ell_n+1})$ et s_{ℓ_n+1} appartient à $\{p^{\pm 1}\}$ pour $n \geq N_1$. La suite $(s_{\ell_n+1}^{-1}\,\gamma_n(x))_{n\geq N_1}$ converge également vers ∞ et $s_{\ell_n+1}^{-1}\,\gamma_n(x))$ appartient à $D(s_{\ell_n+2})$ donc il existe $N_2 \geq N_1$ tel que $s_{\ell_n+2} = s_{\ell_n+1} \in \{p^{\pm 1}\}$ pour tout $n \geq N_2$. En réitérant ce raisonnement, on obtient que pour tout $k > 0$, il existe $N_k > 0$ tel que : $s_{\ell_n+1} = s_{\ell_n+2} => ...s_{\ell_n+k} \in \{p^{\pm 1}\}$ quelque soit $n \geq N_k$. La propriété (ii) n'est donc pas satisfaite. $\square$

On déduit de cette proposition le corollaire suivant.

Corollaire 2.4 *Soit Γ est un groupe fuchsien non élémentaire géométriquement fini, contenant une translation non triviale, tel que $L(\Gamma) - L_c(\Gamma) = \Gamma(\infty)$. L'ensemble des points géométriquement mal approchés (resp. qui ne sont pas mal approchés) de $L^c(\Gamma)$ est infini et non dénombrable.*

Démonstration.

Considérons un générateur p du stabilisateur de l' ∞ dans Γ et une isométrie hyperbolique h dans Γ tels que $G = < p,h >$ soit un groupe de Schottky. D'après la proposition 2.3, l'ensemble des points géométriquement mal approchés est en bijection avec les suites infinies irréductibles de $\{p^{\pm 1},h^{\pm 1}\}$ dont le nombre de p (ou p^{-1}) consécutifs est uniformément borné. Cet ensemble (et son complémentaire) est donc infini et non dénombrable. Montrons qu'un point géométriquement mal approché (resp. qui n'est pas géométriquement mal approché) relativement à G, l'est aussi (resp. ne l'est pas) relativement à Γ. Soient x un tel point et z dans $\mathbb{H}$. L'image de $[z,x)$ par la projection sur

${}_{G}\backslash^{\mathbb{H}}$ est bornée donc celle sur ${}_{\Gamma}\backslash^{\mathbb{H}}$ l'est aussi, ce qui montre que x est géométriquement mal approché relativement à Γ. Si maintenant x n'est pas géométriquement mal approché relativement à G, il existe une suite $t_n \to +\infty$ et $(g_n)_{n\geq 1}$ dans $G - G_\infty$ telle que : $g_n([z,x)) \cap H_{t_n} \neq \phi$. Donc $h_{\Gamma/\mathbb{H}}(x) = 0$. $\square$

3 Démonstrations géométriques des théorèmes B et C.

Posons $\Gamma = PSL(2,\mathbb{Z})$. On rappelle que : $L_c(\Gamma) = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, $\Gamma(\infty) = \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ et que, si x est un irrationnel la quantité $\nu(x)$ est définie par : $\nu(x) = \text{Inf}\ \{c > 0/\text{il existe une infinité de } p \in \mathbb{Z} \text{ et } q \in \mathbb{N}^* \text{ verifiant } \mid x - \frac{p}{q} \mid \leq \frac{c}{q^2}\}$.
Soit $\gamma(z) = \frac{pz+p'}{qz+q'}$ avec $p,q,p',q' \in \mathbb{Z}, q > 0$, et $pq' - p'q = 1$; l'image par γ de l'horocycle H_t est tangent en $\gamma(\infty) = \frac{p}{q}$ à $\mathbb{H}(\infty)$ et son rayon euclidien est $\frac{1}{2tq^2}$. Ainsi $\mid x - \frac{p}{q} \mid \leq \frac{c}{q^2}$ équivaut à : $(\infty\ x) \cap \gamma\ H_{\frac{1}{2c}} \neq \phi$. Donc $\nu(x) = \frac{1}{2\ h_S(x)}$, avec par convention $\nu(x) = 0$ si $h_S(x) = +\infty$. Ceci montre que les notions géométriques et arithmétiques de points mal approchés coïncident.

Soit γ une isométrie hyperbolique de $PSL(2,\mathbb{Z})$, puisque $h_S(\gamma^+) = h_S(\gamma^-\gamma^+)$, $h_S(\gamma^+)$ est un réel strictement positif autrement dit γ^+ est géométriquement mal approché. D'après la propriété II.3.6, les réels γ^+ correspondent aux réels quadratiques. On retrouve ainsi le fait que les réels quadratiques sont arithmétiquement mal approchés.

Soit x un irrationnel positif, analysons en fonction de son développement en fractions continues $[n_0; n_1, n_2...)$ de x, la finitude de $h_S(x)$. Comme $h_S(\gamma(x)) = h_S(x)$ pour tout γ dans $PSL(2,\mathbb{Z})$, on peut supposer que x appartient à $]0,1[\ \cap (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$.
Le théorème suivant est énoncé dans l'introduction. Pour le démontrer nous adoptons le point de vue géométrique développé jusque-là.

Théorème B 3.1 *Soit x un irrationnel de $]0,1[$, notons $[0; n_1, n_2...)$ son développement en fractions continues. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) La suite $(n_i)_{i\geq 1}$ est bornée.

(ii) Le réel x est mal approché.

Démonstration.
non (i) $\Rightarrow$ non (ii). Soit $i \geq 2$, posons $\gamma_i = \mathcal{T}_{-1}^{n_1} ... \mathcal{T}_{-1}^{n_i - 1}$, si i est pair et $\gamma_i = \mathcal{T}_{-1}^{n_1} ... \mathcal{T}_{1}^{n_i - 1} \circ s$, avec $s(z) = -\frac{1}{z}$, sinon. On rappelle que $s\ \mathcal{T}_{-1S} = \mathcal{T}_1^{-1}$. Dans le premier cas, $\gamma_i^{-1}(\infty)$ est le rationnel $-[0; n_{i-1}, n_{i-2}, ..., n_1]$ et $\gamma_i^{-1}(x)$ admet pour développement en fractions continues $[n_i; n_{i+1}, ...)$. Dans le second cas, $\gamma_i^{-1}(\infty)$ est le rationnel $[0; n_{i-1}, ..., n_1]$ et $\gamma_i^{-1}(x)$ admet pour développement $-[n_i; n_{i+1}, ...)$. Dans tous les cas $\mid \gamma_i^{-1}(\infty) - \gamma_i^{-1}(x) \mid \geq n_i$, donc $\gamma_i^{-1}(\infty\ x) \cap H_{\frac{n_i}{2}} \neq \phi$. Les matrices associées à $\mathcal{T}_1^n$ et $\mathcal{T}_{-1}^m$ pour $n,m \in \mathbb{N}^*$ sont à coefficients entiers positifs donc $\lim_{i \to +\infty} c(\gamma_i) = +\infty$. Supposons que

$(n_i)_{i\geq 1}$ ne soit pas borné. Pour tout $t>0$, il existe une sous-suite $(n_{i_k})_{k\geq 1}$ telle que $n_{i_k}\geq 2t$. On a alors : $(\infty\ x)\cap\gamma_{i_k}(H_t)\neq\phi$ et $\lim_{k\to+\infty} c(\gamma_{i_k})=+\infty$. Par conséquent, $h_S(x)\geq t$ pour tout $t>0$ et donc x n'est pas géométriquement mal approché.

non (ii) $\Rightarrow$ non (i). Supposons que x ne soit pas mal approché, d'après la propriété 2.2, le rayon $\pi([i,x))$ n'est pas borné. Pour tout entier $k\geq 1$, il existe donc γ_k dans $PSL(2,\mathbb{Z})$ vérifiant $\lim_{k\to+\infty} c(\gamma_k)=+\infty$ et $[\gamma_k^{-1}(i),\gamma_k^{-1}(x))\cap H_k\neq\phi$. Soit y l'extrémité différente de x de la géodésique portant le rayon $[i,x)$. La géodésique $(\gamma_k^{-1}(y)\gamma_k^{-1}(x))$ rencontre au moins $2k-1$ lignes de Farey verticales consécutives : $\mathcal{T}_1^{m_k+1}(0\ \infty),\mathcal{T}_1^{m_k+2}(0\ \infty),...,\mathcal{T}_1^{m_k+2k-1}(0\ \infty)$. Par ailleurs, $\lim_{k\to+\infty}\gamma_k^{-1}(i)=y$ donc, il existe $K>0$ tel que : $[\gamma_k^{-1}(i),\gamma_k^{-1}(x))\cap\mathcal{T}_1^{m_k+j}(0\ \infty)\neq\phi$ pour tous $k\geq K$ et $1\leq j\leq 2k-1$. On en déduit que $[i,x)$ rencontre les lignes de Farey $\gamma_k\ \mathcal{T}_1^{m_k+1}(0\ \infty),\gamma_k\ \mathcal{T}_1^{m_k+2}(0\ \infty),...,\gamma_k\mathcal{T}_1^{m_k+2k-1}(0\ \infty)$ pour $k\geq K$. Par construction des fractions continues (voir II.3), il existe n_i, tel que $n_i\geq 2k-1$. $\square$

Remarque 3.2 *En reprenant le raisonnement utilisé pour montrer non (i) $\Rightarrow$ non(ii), nous obtenons que si le développement en fractions continues de x contient une infinité d'entiers $(n_{i_k})_{k\geq 1}$ vérifiant : $n_{i_k}\geq N$, où N est un entier fixé strictement positif, alors $h_S(x)\geq\frac{N}{2}$.*

Revenons au cas général, d'après le théorème 1.2, il existe $k>0$ tel que pour tout x dans $L_c(\Gamma)$ on a $h_S(x)\geq k$. Intéressons-nous à la borne inférieure, notée $\mathcal{H}(\Gamma)$, de l'ensemble $\{h_S(x)/x\in L_c(\Gamma)\}$. Calculons explicitement $\mathcal{H}(PSL(2,\mathbb{Z}))$.

Théorème 3.3 *La constante $\mathcal{H}(PSL(2,\mathbb{Z}))$ est égale $\frac{\sqrt{5}}{2}$ et est atteinte par le nombre d'or $\mathcal{N}$.*
De plus, l'ensemble des irrationnels vérifiant : $h_S(x)=\frac{\sqrt{5}}{2}$ est réduit à l'orbite de $\mathcal{N}$ sous $PSL(2,\mathbb{Z})$. Si x n'appartient pas à cette orbite, $h_S(x)\geq\frac{4}{3}$.

Démonstration.

Soit γ une isométrie hyperbolique de $PSL(2,\mathbb{Z})$. D'après la propriété 2.1, on a : $h_S(\gamma^-\gamma^+)=h_S(\gamma^+)$ et

$$h_S(\gamma^-\gamma^+)=\sup_{g\in PSL(2,\mathbb{Z})}\frac{\mid g(\gamma^-)-g(\gamma^+)\mid}{2}.$$

Par un simple calcul on obtient :

$$h_S(\gamma^-\gamma^+)=\sup_{g\in PSL(2,\mathbb{Z})}\frac{\sqrt{(tr\gamma)^2-4}}{2c(g\gamma g^{-1})}.$$

Puisque γ et $g\gamma g^{-1}$ sont des isométries hyperboliques de $PSL(2,\mathbb{Z})$, nécessairement $\mid c(g\gamma g^{-1}) \mid \geq 1$ et $\mid tr\ \gamma \mid \geq 3$. Ainsi $h_S(\gamma^-\gamma^+) \leq \frac{\sqrt{5}}{2}$. Remarquons que : $h_S((\mathcal{T}_1\ \mathcal{T}_{-1})^+) = \frac{\sqrt{5}}{2}$. Il reste donc à montrer que pour tout x irrationnel $h_S(x) \geq \frac{\sqrt{5}}{2}$. Puisque $h_S(\gamma(x)) = h(x)$, on peut se restreindre au cas où x est un irrationnel de $]0,1[$. Notons $[0; n_1, n_2, n_3...)$ son développement en fractions continues. S'il y a une infinité de termes $n_i \geq 3$, d'après la remarque 3.2, $h_S(x) \geq \frac{3}{2}$ et donc $h_S(x) > \frac{\sqrt{5}}{2}$. Sinon quitte à remplacer x par γx, deux cas se présentent : ou bien $n_i = 1$ pour tout $i \geq 1$, ou bien $n_i \leq 2$ pour tout $i \geq 1$ et il existe une suite $(n_{i_k})_{k\geq 1}$ telle que $n_{i_k} = 2$. Dans le premier cas $x = (\mathcal{T}_{-1}\ \mathcal{T}_1)^+$ donc $h_S(x) = \frac{\sqrt{5}}{2}$, dans le second cas posons $\gamma_k = \mathcal{T}_{-1}^{n_1}\ \mathcal{T}_1^{n_2} ... \mathcal{T}_{-1}^{n_{i_k-1}}$ si i_k est pair et $\gamma_k = \mathcal{T}_{-1}^{n_1}\ \mathcal{T}_1^{n_2} ... \mathcal{T}_1^{n_{i_k-1}} \circ s$ si i_k est impair. On a alors : $\mid \gamma_k^{-1}(x) - \gamma_k^{-1}(\infty) \mid = \mid [n_{i_k}; n_{i_k+1}, n_{i_k+2}...) + [0; n_{i_k-1}, n_{i_k-2}...n_1] \mid$. Posons $A_k = [0; n_{i_k+1},...)$ et $B_k = [0; n_{i_k-1},...n_1]$. On a $A_k \geq \frac{1}{3}$ et $B_k \geq \frac{1}{3}$ donc $\frac{|\gamma_k^{-1}(x) - \gamma_k^{-1}(\infty)|}{2} \geq \frac{4}{3}$. Ainsi : $h_S(x) \geq \frac{4}{3} > \frac{\sqrt{5}}{2}$. $\square$

On déduit de ce théorème et de la relation : $\nu(x) = \frac{1}{2h_S(x)}$, le théorème C énoncé dns l'introduction.

Corollaire 3.4 (Théorème C).

$$\sup_{x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}} \nu(x) = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Commentaires

Pour une introduction à la théorie des approximations diophantiennes et les démonstrations des théorèmes A, B, C, nous conseillons au lecteur les livres de Khintchin ([Kh]), Rademacher ([R]) ou Cassels ([C]).

L'approche géométrique des nombres que nos exposons dans ce chapitre permet de démontrer d'autres résultats classiques, notamment sur le spectre de Markov, et de les interpréter géométriquement ([H], [S4]).

L'aspect métrique, comme le théorème de Khintchin, n'a pas été abordé mais peut être aussi traité par cette approche ([Su], [S-V], [Pa]).

Les résultats que nous démontrons ici s'étendent aux quotients de variétés de Hadamard par des groupes fuchsiens ([H-P]).

Enfin, dans le même esprit, la théorie des approximations diophantiennes dans $\mathbb{R}^n$ est reliée à des systèmes dynamiques sur les espaces homogènes $SL(n,\mathbb{Z})\backslash SL(n,\mathbb{R})$. De nombreux travaux portent sur ce sujet, le livre de A. Starkov [St2] en propose une synthèse.

Références

[A] P. Arnoux. Le codage du flot géodésique sur la surface modulaire. L'enseignement Mathématique, t.40 (1994), p 29-48.

[Ar] E. Artin. Ein mechanisches System mit quasiergodischen Bahnen-Hamburg, Mathematisches seminar (1924), p171-175.

[B] M. Babillot. Points entiers et groupes discrets : de l'analyse aux systèmes dynamiques. Panoramas et synthèses (2002) n°13, p 1-112.

[Be] A. Beardon. The geometry of discrete groups. Springer. Verlag. (1983).

[Bo] M. Bourdon. Structure conforme au bord et flot géodésique d'un espace CAT(-1). L'enseignement Mathématique t.41 (1995), p 63-102.

[Bow] B. Bowditch. Geometrical finiteness with variable negative curvature. Duke Mathematical Journal. vol. 77, n°1 (1995), p 229-274.

[B.G.S] W. Ballman-M. Gromov-V. Schroeder. Manifolds of non positive curvature. Progress in Mathematics vol. 61 (1985).

[B.K.S] T. Bedford-M. Keane-C.Series. Ergodic theory, symbolic dynamics and hyperbolic space. Oxford university press (1991).

[C] J. Cassels. An introduction to diophantine approximations. Cambridge University Press. (1957).

[Cr] C. Croke. Rigidity for surfaces of non positive curvature. Comment. Math. Helv. 65 (1990), n°1, p 150-169.

[C.G] J-P. Conze-Y.Guivarc'h. Densité d'orbites d'actions de groupes linéaires et propriétés d'équidistribution de nombres aléatoires. Rigidity in Dynamics and geometry. Springer. Verlag (2000).

[D_1] F. Dal'Bo. Remarques sur le spectre des longueurs d'une surface et comptages. Bol. Soc. Bras. Math, vol 30 n°2 (1999).

[D_2] F. Dal'Bo. Topologie du feuilletage fortement stable. Annales de l'institut Fourier, tome 50 n°3 (2000), p 981-993.

[D.K] F. Dal'Bo-I. Kim. Marked length rigidity for symmetric spaces. Comment. Math. Helv. 77 (2002), p 399-407.

[D.P_1] F. Dal'Bo-M. Peigné. Etudes spectrales d'opérateurs de transfert et applications. Astérisque (1996).

[D.P_2] F. Dal'Bo-M. Peigné. Some negatively curved manifolds with cusps, mixing and counting. J. Reine angew. Math. 497 (1998), p 141-169.

[D.S] F. Dal'Bo-A. Starkov. On non compact minimal sets of geodesic flow. Journal of dynamical and control systems, vol 8 n°1 (2002), p 47-64.

[E_1] P. Eberlein. Geodesic flows on negatively curved manifolds I. Annals of Maths. vol 95, n°3 (1972), p 492-510.

[E_2] P. Eberlein. Visibility manifolds. Pacific Journal of Mathematics vol; 46, n°1, (1973).

[E_3] P. Eberlein. Geodesic flows on negatively curved manifolds II. Transsactions of the american mathematical society vol. 178 (1973), p 57-82.

[E_4] P. Eberlein. Geometry of non positively curved manifolds. Chicago lectures in Mathematics (1996).

[F] D. Ferte. Flot horosphérique des repères sur les variétés hyperboliques de dimension 3 et spectre des groupes kleiniens. Bull. Braz. Math. Soc. 33 (2002) n°1, p 99-123.

[G] E. Ghys. Dynamique des flots unipotents sur les espaces homogènes. séminaire Bourbaki n°747 (1991-1992).

[Gr] L. Greenberg. Discrete groups with dense orbits. Annals of Math. Studies, 53 (1963), p 85-107.

[Gu] Y. Guivarc'h. Produits de matrices aléatoires et applications aux propriétés géométriques de sous-groupes du groupe linéaire. Erg. Th. and Dyn. Syst. 10 (1990), p 483-512.

[G.H] W. Gottschalk-G. Hedlund. Topological dynamics. Amer. Math. Soc colloq. publ. 38 (1955).

[H] A. Hass. Diophantine approximation on hyperbolic riemann surfaces. Acta Mathematica. vol. 156 (1986), p 35-81.

[H.P] S. Herzonsky-F. Paulin. Hausdorff dimension of Diophantine geodesics in negatively curved manifolds. J. Reine angew. Math 539 (2001), p 25-43.

[K] S. Katok. Fuchsian groups. Chicago lectures in Mathematics (1992).

[Kh] A. Khinchin. Continued fractions. Chicago Press (1964).

[Ki] I. Kim. Rigidity of rank one symmetric spaces and their product. Topology 40 n°6 (2001), p 1295-1323.

[Ku] M. Kulikov. The horocycle flow without minimal sets. Compte Rendu de l'Académie des Sciences (2004).

[L] S. Lalley. Renewal theorems in symbolic dynamics, with applications to geodesic flows, noneuclidean tesselations and their fractal limits. Acta Math. 163 (1989), p 1-55.

[L.R] D. Long-A. Reid. Pseudomodular surfaces. J. Reine augew. Math. 552 (2002), p 77-160.

[N] P. Nicholls. The ergodic theory for discrete groups. London Mathematical Society Lecture note series 143. (1989).

[O_1] J-P. Otal. Le spectre marqué des longueurs des surfaces à courbure négative. Annals of Maths, 131 (1990), p 151-162.

[O_2] J-P. Otal. Sur la géométrie symplectique de l'espace des géodésiques d'une variété à courbure négative. Revista Matematica iberoamericana vol. 8, n°3 (1992), p 441-455.

[P] P. Pansu. Le flot géodésique des variétés riemanniennes à courbure négative. séminaire Bourbaki n°738 (1990-1991).

[Pa] S. Patterson. Diophantine approximation in fuchsian groups. Philosophical transactions of the royal Society of London vol. 282 (1976), p 528-563.

[R] M. Rademacher. Lectures on elementary number theory. R. Krieger publishing company (1977).

[Ra] M. Ratner. Raghunathan's conjecture for SL(2,$\mathbb{R}$). Israel J. Math. 80 (1992), p 1-31.

[Ro] T. Roblin. Ergodicité et unique ergodicité du feuilletage horosphérique, mélange du flot géodésique et équidistributions diverses dans les groupes discrets en courbure négative. (Prépublication Rennes 2001).

[S_1] C. Series. Symbolic dynamics for geodesic flows. Acta Mathematica, vol. 146, (1981), p 103-128.

[S_2] C. Series. The infinite word problem and limit sets in fuchsian groups. Erg. The and Dyn. Syst. (1981), 1, p 337-360.

[S_3] C. Series. The modular surface and continued fractions. J. London Math. Soc. vol. 31, (1985) p 69-80.

[S_4] C. Series. The geometry of Markoff numbers. The mathematical Intelligencier vol. 7 n°3 (1985), p 20-29.

[St_1] A. Starkov. Fuchsian groups from the dynamical viewpoint. Journal of dynamical and control systems vol. 1 n°3 (1995), p 427-445.

[St_2] A. Srarkov. Dynamical systems on homogeneous spaces. American Mathematical Society (2000).

[Su] D. Sullivan. Disjoint spheres, approximation by imaginary quadratic numbers and the logarithun law for geodesics. Acta Mathematica 149 (1983), p 215-237.

[S.T] B. Strattman-S.Velani. The Patterson measure for geometrically finite groups with parabolic elements, old and new. Proc. London Math. Soc. 71 (1995), p 197-220.