

# OPÉRATEUR DE SCHRÖDINGER AVEC POTENTIEL SINGULIER MULTIPOLAIRE

THOMAS DUYCKAERTS

RÉSUMÉ. On étudie un opérateur de la forme :  $-\Delta + V$  sur  $\mathbb{R}^d$ , où  $V$  est un potentiel admettant plusieurs pôles en  $a/r^2$ . Plus précisément, on démontre l'estimation de résolvante tronquée à hautes fréquences, classique dans les cas non-captifs, et qui implique des propriétés de régularisation sur l'équation de Schrödinger correspondante. La preuve est basée sur l'introduction d'une mesure de défaut micro-locale semi-classique.

## 1. INTRODUCTION

Nous considérons dans ce travail un opérateur de la forme :

$$(1) \quad P = -\Delta + V,$$

sur l'espace  $\mathbb{R}^d$  ( $d \geq 2$ ), où :

$$\Delta = \sum_j \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$$

est le Laplacien standard, et le potentiel  $V$  est une fonction réelle définie sur  $\mathbb{R}^d$ . L'étude de la résolvante :

$$R_z = (P - z)^{-1}, \quad z \notin \mathbb{R},$$

près de l'axe réel, intéressante en elle-même, permet aussi de préciser le comportement des solutions des équations d'onde et de Schrödinger associées à  $P$ . Lorsque  $V$  est régulier, de nombreuses inégalités ont été démontrées sur des normes de  $R_z$  dans des espaces à poids, notamment l'inégalité standard à haute fréquence, sur la résolvante tronquée :

$$(2) \quad \|\chi R_z \chi\|_{L^2 \rightarrow L^2} \leq \frac{C}{1 + |z|}$$

où  $z$  est grand en module, près de l'axe réel, et  $\chi$  est une fonction régulière à support compact. De tels résultats remontent aux travaux de C. S. Morawetz [15],[16], qui en déduisait la décroissance uniforme de l'énergie locale de l'équation d'onde correspondante. Il est possible de démontrer (2) dans un cadre général, en modifiant la métrique définissant le Laplacien ou en rajoutant un obstacle, moyennant une hypothèse essentielle de non-capture sur les géodésiques de cette métrique (cf [13],[3], [24]).

Dans [22] et [23], les auteurs considèrent des potentiels peu réguliers, et démontrent des estimations sur la résolvante de  $P$ , des effets régularisants sur les équations d'onde et de Schrödinger. Le principe de ces deux articles est d'écrire des estimations sur le laplacien libre  $\Delta$ , puis de considérer  $V$  comme une petite perturbation de ce dernier. Un tel raisonnement fonctionne en particulier si  $V \in L^q$ ,  $q \geq d/2$ .

Ici, nous supposons que le potentiel  $V$ , est petit à l'infini et borné en dehors d'un ensemble fini de pôles distincts :

$$\mathcal{P} = \{p_1, \dots, p_N\} \subset \mathbb{R}^d$$

près desquels :

$$V(x) \approx \frac{a_j}{|x - p_j|^2}.$$

De telles singularités sont critiques, car du même ordre que le Laplacien. Les singularités moins fortes rentrent dans le cadre de l'article précité et pour les singularités d'ordre supérieur on ne peut pas, en général, démontrer (2) (cf [8]). Lorsque les constantes  $a_j$  sont petites, le potentiel  $V$  reste en un certain sens inférieur au laplacien et ce cas est encore traité, lorsque  $d \geq 3$ , dans [23]. En omettant cette hypothèse de petitesse, on change la nature du problème car on ne peut plus considérer  $V$  comme une perturbation du laplacien.

Le cas unipolaire, essentiellement :

$$P_a = -\Delta + \frac{a}{|x|^2}, \quad a + \left(\frac{d}{2} - 1\right)^2 > 0,$$

est traité dans [19] et [6]. Moyennant l'hypothèse sur  $a$ , qui assure la positivité de l'opérateur  $P_a$ , les auteurs démontrent des inégalités de Strichartz sur les équations d'évolutions associées à  $P_a$ . Leur raisonnement repose de manière essentielle sur le caractère radial de  $P_a$  et ne se généralise pas au cas multipolaire.

On démontre ici (2) pour un potentiel multipolaire. Ce type de potentiels apparaît dans certains modèles de relativité générale, mais la motivation principale de ce travail est l'étude d'un problème critique, cas limite où les singularités de  $V$  sont exactement du degré d'homogénéité du Laplacien.

On suppose que près de chaque pôle  $p_j$ ,  $V$  est radial (c'est à dire fonction de la seule variable  $|x - p_j|$ ). Cette condition est légèrement assouplie dans la section 4 (cf théorème 2). On fait également, près de  $p_j$ , les hypothèses suivantes :

$$\frac{a}{|x - p_j|^2} \leq V(x) \leq \frac{C}{|x - p_j|^2}, \quad |\nabla V(x)| \leq \frac{C}{|x - p_j|^3},$$

pour une grande constante  $C$  et un réel  $a$  tel que  $a + (d/2 - 1)^2 > 0$ . Ces hypothèses sont vérifiées par exemple lorsque  $V$  est exactement, près de chaque  $p_j$ , de la forme :

$$\frac{a_j}{|x - p_j|^2}, \quad a_j + \left(\frac{d}{2} - 1\right)^2 > 0.$$

On suppose aussi pour simplifier  $V$  nul à l'infini et borné en dehors des pôles. Dans ces conditions on peut toujours définir, au sens des formes quadratiques, un opérateur auto-adjoint semi-borné inférieurement  $P = -\Delta + V$ . Les hypothèses sur  $V$  et la construction précise de  $P$  sont explicitées et discutées dans la section 2.

**Théorème 1.** *Soit  $V$  vérifiant les hypothèses (4),..., (9) et  $P = -\Delta + V$ . On se donne  $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ . Alors :*

$$(3) \quad \exists \lambda_0 > 0, \exists C > 0, \forall \lambda > \lambda_0, \forall \varepsilon > 0, \quad \|\chi R_{\lambda \pm i\varepsilon} \chi\|_{L^2 \rightarrow L^2} \leq \frac{C}{\sqrt{\lambda}}.$$

*Dans le cas d'un seul pôle ( $N = 1$ ), (3) reste vraie sans la borne (7) sur la dérivée de  $V$ .*

Comme déjà indiqué, l'estimation (3) est l'estimation standard sur la résolvante d'un Laplacien induisant une métrique non captive. Dans les cas captifs, (3) est fautive. Le théorème 1 montre en particulier que l'énergie ne se concentre pas à haute fréquence sur les pôles, et que ces derniers ne se comportent pas non plus comme des obstacles qui renverraient les rayons optiques.

On peut déduire directement de (3), comme dans [4] l'effet régularisant classique sur l'équation de Schrödinger. L'inégalité uniforme haute fréquence, telle qu'elle est démontrée ici, implique cet effet localement en temps. Pour avoir des résultats globaux, il faudrait démontrer la même inégalité pour tout réel  $\lambda$ . On peut aussi déduire du théorème 1 la décroissance de l'énergie locale de l'équation des ondes associée à  $P$ . Notons aussi que ces résultats impliquent des inégalités de Strichartz (avec pertes éventuelles) sur les mêmes équations.

La démonstration suit celle de N. Burq [3], et repose sur l'introduction dans un raisonnement par l'absurde d'une mesure de défaut semi-classique, objet introduit indépendamment par P. Gérard et P.L.

Lions (cf [11], [14]). La difficulté nouvelle repose dans le compréhension du comportement de la mesure près de chacun des pôles.

On peut signaler une approche différente mais relatée à la notre pour démontrer des résultats similaires, celle du calcul de commutateurs positifs introduit par E. Mourre [17], et qui fonctionne telle quelle sur l'opérateur unipolaire  $P_a$ . L'auteur tient à remercier C. Gérard et F. Nier pour l'avoir éclairé sur ce sujet. On renvoie à [10] (et [1] pour une présentation générale). L'article [24] de A. Vasy et M. Zworsky donne une version micro-locale de ce type de techniques.

Mentionnons enfin les travaux récents [18], [7] sur l'équation des ondes en dimension 3 avec un potentiel singulier. L'hypothèse faite dans [7] est simplement une hypothèse de petitesse sur la partie négative du potentiel, similaire à notre hypothèse (6). Dans cet article, le potentiel est pris dans une classe de Kato critique, contenant strictement  $L^{d/2}$ . L'introduction de [18] présente de manière très complète les résultats connus sur les opérateurs de la forme  $-\Delta + V$ .

La deuxième partie du texte est consacrée à la définition précise de  $P$ . La troisième partie concerne la démonstration du théorème 1. Enfin, dans la quatrième partie, on énonce et on démontre un raffinement du théorème 1, où la condition de radialité sur  $V$  près de chaque pôle est assouplie.

## 2. DÉFINITIONS ET HYPOTHÈSES.

On commence par expliciter les hypothèses sur  $V$ . Comme déjà précisé, on se place en dimension  $d \geq 2$ , et on se donne un ensemble de  $N$  pôles ( $N \geq 1$ ) distincts :

$$\mathcal{P} = \{p_1, \dots, p_N\} \subset \mathbb{R}^d.$$

On suppose :

$$(4) \quad V \text{ à support compact sur } \mathbb{R}^d$$

$$(5) \quad V \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R}^d \setminus \mathcal{P}, \mathbb{R}),$$

et qu'il existe des constantes  $l, C_V, C'_V$  strictement positives, une constante réelle  $a$ , des fonctions  $V_j \in L_{loc}^\infty([0, l], \mathbb{R})$  telles que pour tout entier  $j$  compris entre 1 et  $N$ , et pour  $|x - p_j| \leq l$  :

$$(6) \quad V(x) \geq \frac{a}{|x - p_j|^2}, \quad a + \left(\frac{d}{2} - 1\right)^2 > 0$$

$$(7) \quad |V(x)| \leq \frac{C_V}{|x - p_j|^2}$$

$$(8) \quad |\nabla V(x)| \leq \frac{C'_V}{|x - p_j|^3}$$

$$(9) \quad V(x) = V_j(|x - p_j|)$$

Les hypothèses (4) et (5) sont loin d'être minimales mais on s'intéresse ici à l'effet des pôles sur le comportement de  $P$ . Pour des potentiels plus généraux à l'infini on pourra consulter [2], [24].

La borne (8) sur la dérivée et l'hypothèse de radialité (9) de  $V$  près des pôles sont des hypothèses apparemment techniques. Dans le cas d'un seul pôle ( $N = 1$ ), (8) est inutile, ce qui généralise les résultats connus jusqu'alors pour un potentiel unipolaire radial, qui nécessitait toujours une hypothèse sur la dérivée de  $V$ . Dans le théorème 2 plus loin, on fait une hypothèse légèrement plus faible que (9), ce qui permet d'inclure des pôles de la forme :  $1/|x|^2 a(x/|x|)$ . Mais en dehors de ces deux cas, il semble impossible de se passer de (8), (9) avec la méthode de preuve employée ici.

Enfin, (6) et (7) sont absolument essentielles. Sans l'inégalité (6),  $P$  ne serait plus semi-borné inférieurement et le problème serait d'une nature complètement différente. La définition de  $P$  comme opérateur auto-adjoint, que l'on fait ici par l'extension de Friedrichs, serait elle-même ambiguë. D'autre part, il existe des potentiels unipolaires  $V$  strictement positifs, vérifiant une majoration juste un peu plus faible que (7) (en  $\log^2 |x|/|x|^2$ ), et tel que ni (2), ni aucune inégalité de Strichartz ou de dispersion non triviale

ne soient vraie (cf [8]). Si l'on veut encore que (2) soit vérifiée pour des potentiels admettant des pôles d'ordre supérieur, il faut donc faire des hypothèses supplémentaires, peut-être supposer une propriété monotonie de  $V$  au voisinage des pôles.

Soit  $Q$  la forme quadratique sur  $L^2$  définie par :

$$D(Q) = H^1 \cap \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}^d); \frac{1}{|x - p_j|} u \in L^2(\mathbb{R}^d), j = 1, \dots, N \right\}$$

$$Q(u) = \int |\nabla u|^2 dx + \int V|u|^2 dx.$$

**Lemme 2.1.** *Supposons (4),..., (7). La forme quadratique  $Q$  est fermée, semi-bornée inférieurement.*

*Démonstration.* Le fait que  $Q$  soit semi-bornée inférieurement, trivial pour  $d = 2$  ( $V$  est alors positif près de chaque pôle), découle, pour  $d \geq 3$ , de l'inégalité de Hardy :

$$(10) \quad \int |\nabla u|^2 dx \geq \left(\frac{d}{2} - 1\right)^2 \int \frac{1}{|x|^2} |u|^2 dx, \quad u \in H^1(\mathbb{R}^d).$$

En effet, on se donne une partition de l'unité adaptée aux pôles  $p_j$  :

$$\chi_0 \in C^\infty(\mathbb{R}^d), \quad \chi_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d), \quad \sum_{j=1}^N \chi_j^2 = 1$$

$$p_k \notin \text{supp } \chi_j, \quad k \neq j, \quad k = 1, \dots, N, \quad j = 0, \dots, N;$$

et on écrit :

$$\begin{aligned} Q(u) &= \int \sum_{j=0}^N \chi_j^2 |\nabla u|^2 dx + \int \sum_{j=0}^N V \chi_j^2 |u|^2 dx \\ &= \int |\chi_0 \nabla u|^2 dx + \sum_{j=1}^N \int |\nabla(\chi_j u) + [\chi_j, \nabla]u|^2 dx + \sum_{j=0}^N \int V |\chi_j u|^2 dx \\ &\geq \int |\chi_0 \nabla u|^2 dx + (1 - \varepsilon) \sum_{j=1}^N \int |\nabla(\chi_j u)|^2 dx \\ &\quad - C_\varepsilon \sum_{j=1}^N \int |[\chi_j, \nabla]u|^2 dx + \sum_{j=0}^N \int V |\chi_j u|^2 dx, \end{aligned}$$

où  $C_\varepsilon$  désigne une constante dépendant de  $\varepsilon$ . On conclut avec l'hypothèse (6), et l'inégalité (10), appliquée à  $\chi_j u$ , en prenant  $\varepsilon$  assez petit.

Il est évident que  $D(Q)$  est complet pour la norme :

$$\|u\|_Q = \sqrt{Q(u) + \|u\|_{L^2}^2},$$

c'est à dire que  $Q$  est fermée (en fait, dès que  $d \geq 3$ ,  $D(Q)$  est exactement l'espace  $H^1$  d'après l'inégalité de Hardy).  $\square$

**Corollaire 2.2.** *Sous les hypothèses (4),..., (7), on peut associer à  $Q$  un unique opérateur  $P$ , auto-adjoint, semi-borné inférieurement, tel que :*

$$D(P) = \{u \in D(Q), v \mapsto Q(u, v) \text{ continu } L^2\}$$

$$\forall u \in D(P), \forall v \in D(Q), Q(u, v) = (Pu, v)_{L^2}.$$

(cf [20])

La proposition suivante est conséquence immédiate de la définition de  $P$  et, pour le 1), de la densité de  $C_0^\infty(\mathbb{R}^d \setminus \mathcal{P})$  dans  $D(Q)$  :

**Proposition 2.3.** 1)  $D(P) = \{u \in D(Q); -\Delta u + Vu \in L^2\}$ ,  
 2) Sur  $D(P)$ ,

$$Pu = -\Delta u + Vu,$$

où dans 1) et 2),  $-\Delta u + Vu$  est à prendre au sens des distributions sur  $\mathbb{R}^d \setminus \mathcal{P}$ .

**Remarque 2.4.** Même si  $P$  est la somme formelle des opérateurs  $-\Delta$  et  $V$ , on n'a pas toujours les inclusions :

$$D(P) \subset D(-\Delta) = H^2$$

$$D(P) \subset D(V) = \{u \in L^2, \frac{1}{|x - p_j|^2} u \in L^2, j = 1, \dots, N\}.$$

Supposons par exemple, que près d'un pôle  $p_j$ ,  $V$  soit exactement de la forme :

$$(11) \quad \frac{a_j}{|x - p_j|^2}, \quad 0 < a_j + \left(\frac{d}{2} - 1\right)^2 < 1.$$

Considérons la fonction :

$$(12) \quad u_s(x) = |x - p_j|^s \varphi(x - p_j), \quad s = -(d/2 - 1) + \sqrt{(d/2 - 1)^2 + a},$$

où  $\varphi$  est à support compact dans  $\{r < l\}$  et vaut 1 près de 0. Comme  $-\Delta u + Vu$  est nul près du  $j$ -ième pôle, la proposition précédente montre que  $u$  est un élément de  $D(P)$ . Mais  $u$  n'est ni dans  $H^2$ , ni dans  $D(V)$ .

**Remarque 2.5** (non-unicité de l'extension auto-adjointe). Signalons une autre pathologie intéressante, qui survient encore par exemple lorsque  $V$  est de la forme (11) près d'un pôle. La fonction  $u_s$  définie par (12), avec cette fois :

$$s = -(d/2 - 1) - \sqrt{(d/2 - 1)^2 + a},$$

est dans  $L^2$  et vérifie :

$$-\Delta u_s + Vu_s \in L^2$$

au sens des distribution sur  $\mathbb{R}^d \setminus \mathcal{P}$ , mais n'est pas dans  $D(P)$ . Si  $A$  est l'opérateur  $-\Delta + V$ , défini de manière naturelle sur  $C_0^\infty(\mathbb{R}^d \setminus \mathcal{P})$ , on a donc :

$$A \subsetneq P \subsetneq A^*.$$

Ainsi l'opérateur  $A$  n'est pas essentiellement auto-adjoint, et admet plusieurs extensions auto-adjointes, dont l'extension de Friedrichs, choisie ici, qui est la seule dont le domaine est inclus dans  $H^1$ .

Lorsque la constante  $a$  de (6) est assez grande, les deux remarques précédentes ne sont plus valables : l'opérateur  $A$  ci-dessus admet une seule extension auto-adjointe, dont le domaine est exactement l'intersection de  $H^2$  et  $D(V)$ . Pour un aperçu de ses questions et une étude du cas unipolaire, on pourra consulter [21, chap X].

### 3. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1

**3.1. Introduction de la mesure et étude en dehors des pôles.** On ne fait dans ce paragraphe 3.1 que les hypothèses (4),..., (7) sur le potentiel  $V$ . L'adjoint de l'opérateur borné sur  $L^2$  :  $\chi R_{\lambda+i\varepsilon} \chi$  est l'opérateur :  $\overline{\chi} R_{\lambda-i\varepsilon} \overline{\chi}$ . Il suffit donc de démontrer (3) avec le signe  $-$  devant  $i\varepsilon$ . Donnons nous une fonction  $\chi_1$  de  $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$  valant 1 sur le support de  $\chi$ . L'inégalité (3) découle de :

$$(3') \quad \exists \lambda_0 > 0, \exists C > 0, \forall \lambda > \lambda_0, \forall \varepsilon > 0, \quad \|\chi_1 R_{\lambda-i\varepsilon} \chi\|_{L^2 \rightarrow L^2} \leq \frac{C}{\sqrt{\lambda}}.$$

Supposons que (3') soit fausse. Alors il existe des suites  $(\lambda_n)_{n \geq 1}$ ,  $(\varepsilon_n)_{n \geq 0}$  telles que :

$$\lambda_n, \varepsilon_n > 0, \lambda_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty,$$

$$\|\chi_1 R_{\lambda_n - i\varepsilon_n} \chi\|_{L^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^d)} > \frac{n}{\sqrt{\lambda_n}}.$$

Il existe donc une suite  $(g_n)$  de fonctions  $L^2(\mathbb{R}^d)$  telle que :

$$(13) \quad 1 = \|\chi_1 R_{\lambda_n - i\varepsilon_n} \chi g_n\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} > \frac{n}{\sqrt{\lambda_n}} \|g_n\|.$$

De plus, on peut supposer  $g_n \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d \setminus \mathcal{P})$ , cet espace étant dense dans  $L^2$ . On se place dans un contexte semi-classique, en posant :

$$u_n = R_{\lambda_n - i\varepsilon_n} \chi g_n, \quad h_n = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}, \quad f_n = h_n g_n, \quad \alpha_n = \varepsilon_n h_n.$$

On a donc :

$$(14) \quad h_n^2(-\Delta + V)u_n - (1 - i\alpha_n h_n)u_n = \chi h_n f_n,$$

$$(15) \quad \|\chi_1 u_n\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = 1, \quad \|f_n\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0, \quad \alpha_n > 0.$$

Notons que contrairement à un "vrai" problème semi-classique, le potentiel  $V$  a un coefficient  $h_n^2$ . Ce coefficient le rend négligeable, sauf au voisinage de chaque pôle.

On omettra parfois les indices  $n$  pour alléger les notations. On commence par noter que l'on peut se contenter d'étudier la résolvante au voisinage de l'axe réel :

**Lemme 3.1.**

$$(16) \quad \alpha_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

$$(17) \quad \alpha_n \|u_n\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

*Démonstration.* Ceci découle immédiatement du caractère auto-adjoint de l'opérateur  $P$ . En effet, en multipliant (14) par  $\bar{u}_n$  et en intégrant la partie imaginaire, on obtient :

$$\operatorname{Im}(h^2 Q(u_n) - \|u_n\|_{L^2}^2) + h_n \alpha_n \|u_n\|_{L^2}^2 = h \operatorname{Im} \int \chi_2 f_n \bar{u}_n dx$$

On en déduit (17) car d'après (15),  $\chi u_n$  est borné et  $f_n$  tend vers 0 dans  $L^2$ . Egalement d'après (15), la norme de  $u_n$  dans  $L^2$  est minorée quand  $n$  tend vers  $+\infty$  par un réel strictement positif, ce qui donne (16).  $\square$

Le lemme suivant, conséquence facile de l'inégalité de résolvante (3) sur le Laplacien libre, est démontré dans [3] :

**Lemme 3.2.** *La suite  $(u_n)$  est bornée dans  $L_{loc}^2(\mathbb{R}^d)$ .*

On peut donc introduire la mesure semi-classique  $\mu$  associée à  $u_n$  et à la suite d'échelles  $(h_n)$  (cf [3], [9]). C'est une mesure de Radon positive sur  $\mathbb{R}_x^d \times \mathbb{R}_\xi^d$  qui vérifie, à extraction d'une sous-suite de  $(u_n, h_n)$  près :

$$(18) \quad \forall a \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d), \quad (a(x, h_n D)\varphi(x)u_n, u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \langle \mu, a \rangle$$

Où l'on a noté  $(\cdot, \cdot)$  le produit scalaire  $L^2(\mathbb{R}^d)$ ,  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_x^d)$  une fonction valant 1 sur la projection en  $x$  du support de  $a$ , et  $a(x, h_n D)$  la suite d'opérateur uniformément bornée sur  $L^2(\mathbb{R}^d)$  de noyau :

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int a(x, h_n \xi) e^{i(x-y) \cdot \xi} d\xi.$$

Rappelons que la limite (18) ne dépend pas de la fonction  $\varphi$ .

**Proposition 3.3.** *Sous les hypothèses (4),..., (7) :*

(1) **Vitesse d'oscillation de  $u_n$  et convergence  $L^2$ .** Si  $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ ,

$$(19) \quad h_n^2 \int |\nabla u_n|^2 \psi \, dx + \sum_{j=1..N} h_n^2 \int \frac{1}{|x - p_j|^2} |u_n|^2 \psi \, dx = O(1), \quad n \rightarrow +\infty.$$

*En particulier :*

$$(20) \quad u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0 \text{ dans } L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^d) \iff \mu = 0.$$

(2) **Localisation de  $\mu$ .** Le support de la mesure  $\mu \mathbb{1}_{(\mathbb{R}^d \setminus \mathcal{P}) \times \mathbb{R}^d}$  est inclus dans  $\{(x, \xi) \in \mathbb{R}_x^d \times \mathbb{R}_\xi^d, |\xi|^2 = 1\}$ .

(3) **Invariance de  $\mu$ .** La mesure  $\mu$  vérifie l'équation :

$$(21) \quad \xi \cdot \partial_x \mu = 0,$$

au sens  $\mathcal{D}'((\mathbb{R}_x^d \setminus \mathcal{P}) \times \mathbb{R}_\xi^d)$ .

(4) **Condition à l'infini.** Soit  $M > 0$  assez grand. La mesure  $\mu$  est nulle près des points rentrants :

$$\text{Inc} = \{(x, \xi) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d; |x| \geq M, x \cdot \xi \leq 0\}.$$

*Démonstration.* Pour démontrer le 1, on fait le produit scalaire de l'équation (14) sur  $u$  avec  $\psi u$  et on obtient, en utilisant que  $f_n$  et  $u_n$  sont bornés dans  $L_{\text{loc}}^2$  :

$$h_n^2 \text{Re} Q(u_n, \psi u_n) = O(1), \quad n \rightarrow +\infty.$$

Mais par une intégration par partie élémentaire :

$$\text{Re} Q(u_n, \psi u_n) = h_n^2 \int |\nabla u_n|^2 \psi \, dx - h_n^2 \int |u_n|^2 \Delta \psi \, dx + h_n^2 \int V |u_n|^2 \psi \, dx,$$

ce qui implique (19), en utilisant l'inégalité de Hardy comme dans le lemme 2.1. On en déduit que  $u_n$  est  $h_n$ -oscillante, c'est à dire que pour toute fonction  $\psi$  de  $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ ,

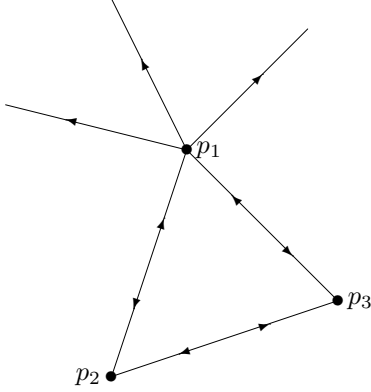
$$(22) \quad \lim_{R \rightarrow +\infty} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \int_{|h_n \xi| \leq 1} |\widehat{\psi u_n}(\xi)|^2 \, d\xi = 0.$$

L'équivalence (20) est une conséquence facile de (22) (cf [9])

Les points 2 et 3 sont élémentaires et démontrés dans [3] Le point 4, moins immédiat, se déduit de l'étude du Laplacien libre. C'est une version micro-locale de la condition de radiation Sommerfeld. Si l'on change le signe devant  $i h \alpha_n$  dans (14), il faut remplacer Inc par

$$\text{Outc} = \{(x, \xi); |x| \geq M, x \cdot \xi \geq 0\}.$$

On renvoie à [3] pour la démonstration. □

Fig. 1 : le support de  $\mu$ 

L'équation (21) est une équation de transport qui implique que la mesure, en dehors des pôles, est invariante le long des courbes intégrales du champ hamiltonien associé à  $\xi\partial_x$ , qui dans notre cas sont de la forme :  $\{(x_0 + s\xi_0, \xi_0), s \in ]a, b[ \}$ . Dans [3], il n'y a pas de pôle, et le point 4 implique donc, avec cette propriété d'invariance de la mesure et une hypothèse de non-capture qui dit que toute courbe intégrale du champ hamiltonien passe dans l'ensemble Inc, que la mesure  $\mu$  est nulle. Ceci montre, la suite  $(u_n)$  étant  $h_n$ -oscillante, qu'elle tend vers 0 dans  $L^2_{\text{loc}}$ , contredisant ainsi l'hypothèse (15).

Dans notre cas, la stratégie de preuve est la même, mais l'argument précédent ne fonctionne pas pour les trajectoires passant par  $\mathcal{P}$ . L'invariance de la mesure et le point 4 de la proposition 3.3 impliquent seulement que le support de  $\mu$  est inclus dans la réunion des rayons reliant les pôles et des rayons sortants partant de chacun de ces pôles (cf figure ci-jointe).

Ces derniers rayons sont les plus faciles à éliminer, par un argument de "conservation de l'énergie" exprimé dans la proposition 3.4 : si le support de la mesure  $\mu$  ne contient aucun rayon rentrant dans un certain compact, il ne peut pas non plus contenir de rayon sortant de ce compact.

**Proposition 3.4.** Soient  $R_1, R_2$ , vérifiant :

$$0 < R_1 < R_2,$$

et tels que  $\chi$  et  $V$  soient nuls sur  $\{|x| \geq R_1\}$ . Supposons :

$$(23) \quad \text{supp } \mu \cap \{R_1 \leq |x| \leq R_2\} \subset \{x \cdot \xi > 0\}$$

ou :

$$(23') \quad \text{supp } \mu \cap \{R_1 \leq |x| \leq R_2\} \subset \{x \cdot \xi < 0\}$$

Alors  $\mu$  est nulle sur  $\{|x| \geq R_1\}$ .

*Démonstration.* Soit  $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ , radiale, telle que :

$$r \geq R_2 \Rightarrow \varphi(r) = 1, \quad r \leq R_1 \Rightarrow \varphi(r) = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial r} \geq 0.$$

Alors :

$$\begin{aligned} 0 &= \text{Im} \left( (-h^2 \Delta u - u + ih\alpha u), \varphi u \right)_{L^2(\mathbb{R}^d)} \\ &= \text{Im} h \int h \nabla \varphi \cdot \nabla u \bar{u} \, dx + h\alpha \int |u|^2 \varphi \, dx \end{aligned}$$

Donc d'après (17) :

$$(24) \quad \text{Im} \int h_n \nabla \varphi \cdot \nabla u_n \bar{u}_n \, dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

La suite  $u_n$  est  $h_n$ -oscillante, on a donc, en se donnant une fonction  $\psi$  de  $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ , à valeurs réelles et valant 1 près de 0,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \text{Im} \int h \nabla \varphi \cdot \nabla u \bar{u} \, dx &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} \text{Im} \int h \nabla \varphi \cdot \nabla u \psi(R^{-1}hD) \bar{u} \, dx \\ &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} \text{Im} \int \psi(R^{-1}hD) (\nabla \varphi \cdot \nabla u) \bar{u} \, dx \\ &= - \langle \mu, \nabla \varphi(x) \cdot \xi \rangle. \end{aligned}$$

On déduit de (24) que cette dernière quantité est nulle. Mais d'après l'hypothèse (23) ou (23'),  $\nabla\varphi(x).\xi$  a un signe constant sur le support de  $\mu$ . La positivité de  $\mu$  montre alors qu'elle est nulle sur l'ensemble :

$$\{\nabla\varphi(x).\xi \neq 0\}$$

ce qui implique la nullité de  $\mu$  sur la couronne  $\{\frac{d\varphi}{dr} \neq 0\}$ , et donc par invariance sur  $\{|x| \geq R_1\}$ .  $\square$

Il nous reste à montrer que  $\mu$  ne charge pas les pôles et s'annule le long des rayons reliant ces pôles. Le premier point ne nécessite pas l'hypothèse (8) et est traité dans les deux prochaines parties. Dans le cas d'un seul pôle, on en déduit immédiatement la contradiction recherchée. Le deuxième point est traité dans la partie 3.4 où on a besoin de toutes les hypothèses (4),..., (9) sur  $V$ .

**3.2. Elimination des petites harmoniques sphériques près d'un pôle.** D'après le paragraphe 3.1, la projection spatiale du support de la mesure  $\mu$  est incluse dans l'ensemble formé des  $N$  pôles et des  $\frac{N(N-1)}{2}$  segments les reliant. On cherche ici à étudier le comportement de  $\mu$  au voisinage d'un pôle  $p_j$ . On translate le repère pour prendre  $p_j$  comme origine et on se place en coordonnées sphériques :

$$r = |x| \in ]0, +\infty[, \quad \theta = \frac{x}{|x|} \in S^{d-1}.$$

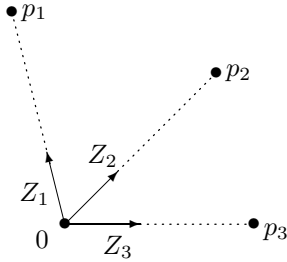


Fig. 2 : les vecteurs  $Z_j$

Notons  $\mathcal{P}'_0$  l'ensemble des pôles différents de 0 dans ce nouveau repère et  $Z_j$  les directions sortantes :

$$Z_j = \frac{p_j}{|p_j|}, \quad p_j \in \mathcal{P}'_0.$$

La mesure au voisinage de  $x = 0$  se concentre (sauf peut-être en  $x = 0$ ), sur  $\{|\xi| = 1\}$ , sur chacun des segments partant de 0 dans les directions  $Z_j$ . Elle est invariante par le flot hamiltonien en dehors de 0 et ne charge pas 0. On en déduit :

$$(25) \quad \langle \mathbb{1}_{x \neq 0} \mu, a \rangle = \sum_{p_j \in \mathcal{P}'_0} \int_0^{+\infty} (\lambda_i^+ a(x = tZ_i, \xi = Z_i) + \lambda_i^- a(x = tZ_i, \xi = -Z_i)) dt,$$

$$a \in C_0^\infty(\{x \in \mathbb{R}^d, |x| \leq l\} \times \mathbb{R}_\xi^d),$$

où les  $\lambda_i^+$ ,  $\lambda_i^-$  sont, du fait de la positivité de  $\mu$ , des constantes positives.

Décomposons  $u$  et  $f$  en harmoniques sphériques :

$$(26) \quad u_n(x) = \sum_{k \in \mathbb{N}} u_{kn}(r) e_k(\theta), \quad f_n(x) = \sum_{k \in \mathbb{N}} f_{kn}(r) e_k(\theta),$$

où les  $e_k$  sont les fonctions propres du Laplacien sur la sphère, qui forment une base hilbertienne de  $L^2(S^{d-1})$  telle que :

$$e_k \in C^\infty(S^{d-1}), \quad -\Delta e_k = \nu_k^2 e_k$$

$$\nu_{k+1} \geq \nu_k \geq \nu_0 = 0, \quad \nu_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} +\infty$$

Fixons un entier naturel  $\tilde{\nu}$ . On sépare les petites et les grandes harmoniques sphériques de  $u$  et de  $f$  :

$$(27) \quad \begin{aligned} u_n &= u_{\mathfrak{p}n} + u_{\mathfrak{g}n}, & u_{\mathfrak{p}n} &\stackrel{def}{=} \sum_{\nu_k \leq \tilde{\nu}} \mathbf{u}_{kn} e_k, & u_{\mathfrak{g}n} &\stackrel{def}{=} \sum_{\nu_k > \tilde{\nu}} \mathbf{u}_{kn} e_k \\ f_n &= f_{\mathfrak{p}n} + f_{\mathfrak{g}n}, & f_{\mathfrak{p}n} &\stackrel{def}{=} \sum_{\nu_k \leq \tilde{\nu}} \mathbf{f}_{kn} e_k, & f_{\mathfrak{g}n} &\stackrel{def}{=} \sum_{\nu_k > \tilde{\nu}} \mathbf{f}_{kn} e_k. \end{aligned}$$

On notera  $\mu_{\mathfrak{p}}$  (respectivement  $\mu_{\mathfrak{g}}$ ) la mesure semi-classique associée près de 0 à la suite  $(u_{\mathfrak{p}n})_n$  (respectivement  $(u_{\mathfrak{g}n})_n$ ) et à la suite d'échelle  $(h_n)_n$ . Par un argument élémentaire d'orthogonalité, l'équation (14) étant radiale au voisinage du pôle, les deux suites vérifient près de 0, cette même équation (en remplaçant  $f_n$  par  $f_{\mathfrak{g}n}$  ou  $f_{\mathfrak{p}n}$ ), et elles sont donc toutes les deux  $h_n$ -oscillantes.

L'intérêt de cette décomposition est que pour étudier  $u_{\mathfrak{p}}$ , on est ramené à un nombre fini d'équations différentielles ordinaires, et que l'opérateur  $P$  est "très" positif près de 0 lorsqu'il agit sur les grandes harmoniques sphériques. Dans ce paragraphe, on montre que les petites harmoniques sphériques ne jouent aucun rôle. L'étude de  $\mu_{\mathfrak{g}}$  se fera dans les deux paragraphes suivants.

**Proposition 3.5.** *Sous les hypothèses (4),..., (7) et (9), la mesure  $\mu_{\mathfrak{p}}$  est nulle et les mesures  $\mu$  et  $\mu_{\mathfrak{g}}$  sont égales.*

*Démonstration.* On commence par démontrer :

**Lemme 3.6.** *La mesure  $\mu_{\mathfrak{p}}$  ne charge pas 0.*

*Démonstration.* On considère la mesure  $\mu_k$  associée à la suite  $h_n$ -oscillante  $(\mathbf{u}_{kn} e_k)_n$ . Puisque  $u_{\mathfrak{p}}$  est la somme d'un nombre fini de  $\mathbf{u}_k e_k$ , il suffit de montrer le lemme sur chacune des mesure  $\mu_k$ . On fixe donc  $k \geq 0$ . On a, en notant ' la dérivée par rapport à  $r$  :

$$(28) \quad -h_n^2 \mathbf{u}_{kn}'' + h_n^2 \frac{d-1}{r} \mathbf{u}_{kn}' + h_n^2 (V + \frac{\nu_k^2}{2}) \mathbf{u}_{kn} - (1 - ih_n \alpha_n) \mathbf{u}_{kn} = h \mathbf{f}_{kn}$$

Posons :

$$(29) \quad \mathbf{u}_{kn}(r) = r^{\frac{d-1}{2}} \mathbf{v}_{kn}, \quad \mathbf{f}_{kn}(r) = r^{\frac{d-1}{2}} \mathbf{g}_{kn}$$

$$(30) \quad W_k \stackrel{def}{=} V + \frac{\nu_k^2}{r^2} + \frac{d^2 - 4d + 3}{4r^2}, \quad |W_k(r)| \leq \frac{C_1}{r^2}$$

On a :

$$(31) \quad S_k \mathbf{v}_k = h \mathbf{g}_k, \quad S_k \stackrel{def}{=} -h^2 \frac{d^2}{dr^2} + h^2 W_k - (1 - ih\alpha)$$

Dans cette démonstration, on ne précise pas la dépendance éventuelle en  $k$  des constantes (qui sont bien sûr indépendantes de  $n$ ),  $k$  étant fixé de bout en bout. Il suffit de montrer :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists r_1 > 0, \limsup_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{r_1} |\mathbf{v}_{kn}|^2 dr \leq \varepsilon.$$

Soit  $\varepsilon$  strictement positif. D'après (19),

$$\exists C_2 > 0, \quad \forall n, \quad \int_0^{r_0} \frac{h_n^2}{r^2} |\mathbf{v}_{kn}|^2 dr \leq C_2.$$

Soit  $m > 0$ . On a :

$$(32) \quad \int_0^{mh} |\mathbf{v}_k(r)|^2 dr \leq m^2 \int_0^{mh} \frac{h^2}{r^2} |\mathbf{v}_k|^2 dr \leq C_2 m^2 \leq \varepsilon,$$

en choisissant  $m$  assez petit pour que la dernière inégalité soit vérifiée. Il nous reste à majorer la norme  $L^2$  de  $\mathbf{v}_k$  dans la zone  $\{r > mh\}$ . On introduit :

$$E_{kn}(r) \stackrel{def}{=} |\mathbf{v}_{kn}(r)|^2 + |h_n \mathbf{v}_{kn}'(r)|^2,$$

qui est dérivable, de dérivée :

$$\begin{aligned}
E'_k(r) &= 2\operatorname{Re} (v'_k \bar{v}_k + h^2 v'_k \bar{v}'_k) \\
&= 2\operatorname{Re} (h^2 W_k v'_k \bar{v}_k - i\alpha v'_k \bar{v}_k - h\chi v'_k \bar{f}_k) \\
|E'_k(r)| &\leq \left( \frac{C_1 h}{r^2} + \alpha \right) |h v'_k v_k| + |h v'_k f_k| \\
(33) \quad -E'_k(r) &\leq \left( \frac{C_1 h}{r^2} + 1 \right) E_k(r) + |f_k(r)|^2,
\end{aligned}$$

dès que  $n$  est assez grand pour que  $\alpha$  soit inférieur à 1. On a obtenu la deuxième ligne par l'équation (31) sur  $v_k$ . Majorons  $E_k$  près de 0 par le lemme de Gronwall. Pour cela, on fixe deux réels strictement positifs  $t$  et  $\rho$ . Il découle de (33) :

$$\forall r \geq t, \quad -\frac{d}{dr} \left( e^{\int_t^r (C_1 h/s^2 + 1) ds} E_k(r) \right) \leq e^{\int_t^r (C_1 h/s^2 + 1) ds} |f_k(r)|^2.$$

Soit, en intégrant cette inégalité entre  $t$  et  $t + \rho$ , avec  $t \geq mh$  :

$$E_k(t) \leq e^{C_1/m+\rho} \kappa_k^2 + e^{C_1/m} E_k(t + \rho), \quad \kappa_k^2(n) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^l |f_{kn}(r)|^2 dr.$$

On intègre maintenant par rapport à la mesure  $dt$  entre  $mh$  et un réel strictement positif  $r_1$ . On obtient :

$$(34) \quad \int_{mh}^{r_1} E_k(t) dt \leq \underbrace{e^{C_1/m+\rho} r_1 \kappa_k^2}_{\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{0}} + e^{C_1/m+\rho} \int_{mh}^{r_1} E_k(t + \rho) dt$$

Fixons  $\rho$  strictement compris entre 0 et  $l$ . On a :

$$\begin{aligned}
(35) \quad \int_{\rho}^{r_1+\rho} E_k(r) dr &= \int_{\rho}^{r_1+\rho} |u_k(r)|^2 r^{d-1} dr + h^2 \int_{\rho}^{r_1+\rho} |u'_k(r)|^2 r^{d-1} dr + O(h^2), \quad n \rightarrow +\infty \\
\limsup_{n \rightarrow +\infty} \int_{\rho}^{r_1+\rho} E_{kn}(r) dr &\leq 2\mu_k(\{\rho \leq |x| \leq r_1 + \rho\})
\end{aligned}$$

On a obtenu cette dernière ligne en utilisant que sur le support de  $\mu \mathbb{1}_{\{x \neq 0\}}$ , et donc sur celui de  $\mu_k \mathbb{1}_{\{x \neq 0\}}$ ,  $|\xi|$  vaut 1. La forme de la mesure  $\mu_p$  près de 0 montre que le terme de droite de cet inégalité peut-être choisi plus petit que  $e^{-C_1/m} \varepsilon$ , en prenant  $r_1$  assez petit. En effet, l'orthogonalité des harmoniques sphériques montre que :

$$\begin{aligned}
\mu(\{\rho \leq |x| \leq r_1 + \rho\}) &= \mu_p(\{\rho \leq |x| \leq r_1 + \rho\}) + \mu_g(\{\rho \leq |x| \leq r_1 + \rho\}) \\
&\geq \mu_p(\{\rho \leq |x| \leq r_1 + \rho\}),
\end{aligned}$$

et la mesure  $\mu$  ne charge pas les cercles autour du pôle. Finalement en utilisant (35) avec un tel  $r_1$ , ainsi que (32),(34), on obtient :

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{r_1} E_{kn}(r) dr \leq 2\varepsilon,$$

ce qui achève la démonstration.  $\square$

Fixons maintenant un  $r_0$  proche de 0. Les suites  $(u_n)$ ,  $(u_{\mathfrak{g}n})$  et  $(u_{\mathfrak{p}n})$ , vérifient deux propriétés d'“orthogonalités”.

– La première est simplement l'orthogonalité dans  $L^2$  des harmoniques sphériques, qui implique :

$$(u_{\mathfrak{g}n}, u_{\mathfrak{p}n})_{L^2(\{r \leq r_0\})} = 0.$$

D'où :

$$(36) \quad \begin{aligned} |u_n|_{L^2(\{r \leq r_0\})}^2 &= |u_{\mathfrak{p}n}|_{L^2(\{r \leq r_0\})}^2 + |u_{\mathfrak{g}n}|_{L^2(\{r \leq r_0\})}^2, \\ \mu(\{r \leq r_0\}) &= \mu_{\mathfrak{g}}(\{r \leq r_0\}) + \mu_{\mathfrak{p}}(\{r \leq r_0\}). \end{aligned}$$

- La deuxième est le fait que les deux mesure  $\mu \mathbb{1}_{\{|x| < 2r_0\}}$  et  $\mu_{\mathfrak{p}} \mathbb{1}_{\{|x| < 2r_0\}}$  sont mutuellement singulières. La première de ces mesures est portée par l'ensemble :

$$\mathcal{S} = S \times \mathbb{R}_{\xi}^d, \quad S = \{sZ_j, \quad s \in [0, 2r_0[, \quad p_j \in \mathcal{P}'_0\}.$$

Nous allons démontrer que  $\mu_{\mathfrak{p}} \mathbb{1}_{\{|x| < 2r_0\}}$  ne charge pas cet ensemble. Soit  $\varepsilon > 0$ . La mesure  $\mu_{\mathfrak{p}}$  ne charge pas 0, donc si  $\rho$  est assez petit,

$$(37) \quad \mu_{\mathfrak{p}}(\{|x| \leq \rho\}) \leq \varepsilon.$$

D'autre part,  $u_{\mathfrak{p}}$  ne peut pas se concentrer sur un rayon. En effet, si  $Z$  est dans  $S^{d-1}$  :

$$(38) \quad \begin{aligned} \left\{ \int_{|x/|x|-Z| \leq \eta, |x| \leq 2r_0} |u_{\mathfrak{p}n}(x)|^2 dx \right\}^{1/2} &\leq \sum_{k, \nu_k \leq \tilde{\nu}} \left\{ \int_{|x/|x|-Z| \leq \eta, |x| \leq 2r_0} |u_{kn}(|x|) e_k(x/|x|)|^2 dx \right\}^{1/2} \\ &\leq \sum_k \left\{ \int_0^{2r_0} |u_{kn}(r)|^2 r^{d-1} dr \right\}^{1/2} \left\{ \int_{|\theta-Z| \leq \eta} |e_k(\theta)|^2 d\theta \right\}^{1/2} \end{aligned}$$

Le premier facteur est majoré par une constante indépendante de  $n$ , et le deuxième, indépendant de  $n$ , tend vers 0 lorsque  $\eta$  tend vers 0. On obtient finalement, avec (37) et (38), que pour tout  $\varepsilon$ , il existe un voisinage  $V$  de  $\mathcal{S}$  tel que :

$$\mu_{\mathfrak{p}}(V) \leq \varepsilon,$$

et donc que  $\mu_{\mathfrak{p}} \mathbb{1}_{\mathcal{S}} = 0$ . Il est facile de montrer, dans ces conditions que pour tout symbole  $a(x, \xi) \in C_0^\infty(\{|x| < 2r_0\} \times \mathbb{R}^d)$  et pour toute fonction régulière  $\varphi$  tronquant autour de 0, on a :

$$(39) \quad (a(x, hD)\varphi u_{\mathfrak{p}}, u)_{L^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

(il suffit de diviser le produit scalaire entre un petit voisinage de  $S$ , sur lequel la limite supérieur des normes  $L^2$  de  $u_{\mathfrak{p}n}$  est aussi petite que l'on veut, et son complémentaire, sur lequel la norme  $L^2$  de  $u_{\mathfrak{g}n}$  tend vers 0 quand  $n$  tend vers l'infini). Finalement, l'égalité :  $u_{\mathfrak{g}} = u - u_{\mathfrak{p}}$  et (39) impliquent :

$$(40) \quad \mu_{\mathfrak{g}}(\{r \leq r_0\}) = \mu(\{r \leq r_0\}) + \mu_{\mathfrak{p}}(\{r \leq r_0\}).$$

D'après (36) et (40),  $\mu_{\mathfrak{p}}(\{r \leq r_0\})$  est nulle. La proposition 3.5 est démontrée.  $\square$

### 3.3. Absence de concentration sur le pôle.

**Proposition 3.7.** *Sous les hypothèses (4), ..., (7) et (9), la mesure  $\mu$  ne charge pas les pôles.*

**Corollaire 3.8.** *Sous les mêmes hypothèses et si  $N = 1$ ,  $\mu$  est nulle.*

En effet, dans ce dernier cas, d'après le paragraphe 3.1 (propositions 3.3 et 3.4), la projection en  $x$  du support de  $\mu$  est incluse dans le pôle. L'étude du cas  $N \geq 2$  est complétée dans la partie 3.4.

Pour montrer la proposition, on reprend les notations de la partie 3.2. On se place encore au voisinage du pôle  $p_{j_0} = 0$  et on considère la décomposition (27) en petites et grandes harmoniques sphériques :  $u = u_{\mathfrak{p}} + u_{\mathfrak{g}}$ . La mesure  $\mu_{\mathfrak{p}}$  étant nulle, il suffit de montrer que la mesure  $\mu_{\mathfrak{g}}$  ne charge pas les pôles. On va en fait montrer un résultat plus fort :

**Lemme 3.9.** *Soit  $t \in ]0, 1[$ . Si  $\tilde{\nu}$  est choisi assez grand :*

$$(41) \quad \int_{|x| \leq 1} |x|^{-t} |u_{\mathfrak{g}n}|^2 dx = O(1), \quad n \rightarrow +\infty.$$

*Démonstration.* Comme dans la démonstration du lemme 3.6, on note  $r^{(d-1)/2}\mathbf{v}_{kn} = \mathbf{u}_{kn}$ . Fixons  $n$  et  $k$ . Pour justifier nos intégrations par parties, on a besoin de connaître le comportement près de 0 de  $\mathbf{v}_{kn}$  et de ces dérivées. On notera :

$$F(r) \underset{r \rightarrow 0}{\lesssim} G(r) \iff \exists \varepsilon > 0, \quad \exists A > 0, \quad \forall r \in ]0, \varepsilon[, \quad |F(r)| \leq A|G(r)|.$$

On a choisi les fonctions  $f_n$  nulles près de chaque pôle. La fonction  $\mathbf{v}_{kn}$  est donc, au voisinage de 0, solution de l'équation différentielle en  $y$  :  $S_k y = 0$  (où  $S_k$  est l'opérateur différentiel de degré 2 défini par (31)), qui admet une famille libre de solutions  $\{y_+, y_-\}$  telle que :

$$(42) \quad \begin{aligned} \left(\frac{d}{dr}\right)^j y_+(r) &\underset{r \rightarrow 0}{\lesssim} r^{1-j+\sigma_k}, \quad j = 0, 1, 2 \\ \left(\frac{d}{dr}\right)^j y_-(r) &\underset{r \rightarrow 0}{\gtrsim} r^{1-\sigma_k} \\ \sigma_k &:= \sqrt{(d/2 - 1)^2 + a + \nu_k^2}. \end{aligned}$$

Réserçons la preuve de cette affirmation à plus tard (cf le lemme 3.11). La fonction  $u_n$  étant dans le domaine de  $P$ ,  $r^{-1}\mathbf{u}_{kn}$  est dans l'espace  $L^2(r^{d-1}dr)$ , et donc  $r^{-1}\mathbf{v}_{kn}$  est dans l'espace  $L^2(dr)$ . On en déduit que la composante de  $\mathbf{v}_{kn}$  selon  $y_-$  est nulle et donc que  $\mathbf{v}_{kn}$  vérifie :

$$(43) \quad \left(\frac{d}{dr}\right)^j \mathbf{v}_{kn}(r) \underset{r \rightarrow 0}{\lesssim} r^{1-j+\sigma_k}, \quad j = 0, 1, 2$$

Cette majoration n'est uniforme ni en  $n$ , ni en  $k$ , mais elle justifie toutes les intégrations par parties qui suivent grâce à la remarque élémentaire suivante :

**Remarque 3.10.** Soient  $F$  et  $G$  deux fonctions régulières de la variable  $r > 0$ , nulles à l'infini, telles que pour des réelles  $\sigma$  et  $\tau$  vérifiant  $\sigma + \tau > 0$  :

$$\left(\frac{d}{dr}\right)^j F(r) \underset{r \rightarrow 0}{\lesssim} r^{\sigma-j}, \quad \left(\frac{d}{dr}\right)^j G(r) \underset{r \rightarrow 0}{\lesssim} r^{\tau-j}, \quad j = 0, 1.$$

Alors :

$$\int_0^{+\infty} \frac{dF}{dr} G dr = - \int_0^{+\infty} F \frac{dG}{dr} dr$$

Notons  $\mathbf{w}_{kn} = e^{i\frac{r}{h}}\mathbf{v}_{kn}$  et posons :

$$\begin{aligned} \beta_k^2(n) &:= \int_0^l |\mathbf{w}_{kn}|^2 dr, \quad \gamma_k^2(n) := \int_0^l h_n^2 |\mathbf{w}'_{kn}|^2 dr, \quad \kappa_k^2(n) := \int_0^l |\mathbf{g}_{kn}|^2 dr \\ M_k^2(n) &:= \gamma_k^2(n) + (1 + h^2 \nu_k^2) \beta_k^2(n) + \kappa_k^2(n). \end{aligned}$$

Les suite  $u_n$ ,  $h\nabla u_n$ , et  $\frac{h}{r}u_n$  sont bornées dans  $L^2_{\text{loc}}$ , et  $f_n$  tend vers 0 dans  $L^2$ . On a donc :

$$(44) \quad \sum_{k=0}^{+\infty} \kappa_k^2(n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0, \quad \sum_{k=0}^{+\infty} M_k^2(n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\equiv} O(1).$$

L'équation vérifiée par  $\mathbf{w}_{kn}$  pour  $r \leq l$  s'écrit :

$$(45) \quad \begin{aligned} T_k \mathbf{w}_{kn} &= h e^{ir/h} \mathbf{g}_{kn} \\ T_k \stackrel{\text{def}}{=} e^{ir/h} S_k e^{-ir/h} &= -h^2 \frac{d^2}{dr^2} + h^2 \frac{b_k}{r^2} + h^2 V + ih \left( \alpha + 2 \frac{d}{dr} \right) \\ b_k &:= \nu_k^2 + \frac{d^2 - 4d + 3}{4} \end{aligned}$$

On a :

$$\nu_k \geq \tilde{\nu} \Rightarrow \sigma_k \geq \tilde{\sigma}, \quad \tilde{\sigma} := \sqrt{(d/2 - 1)^2 + a + \tilde{\nu}^2}.$$

On se donne une fonction positive  $\varphi$  de  $C_0^\infty([0, l])$  valant 1 près de 0. Le réel  $t \in ]0, 1[$  étant fixé, on choisit  $\tilde{\nu}$  tel que :

$$(46) \quad 2\tilde{\sigma} - t > 0.$$

On commence par montrer que si  $\tilde{\nu}$  est assez grand :

$$(47) \quad \int h_n^2 |\mathbf{w}'_{kn}|^2 r^{-t} \varphi \, dr + \int h_n^2 |\mathbf{w}_{kn}|^2 r^{-2-t} \varphi \, dr = O(M_k^2(n)),$$

où on a noté :

$$X_k(n) = O(Y_k(n)) \iff \exists C > 0, \quad \forall k, \nu_k \geq \tilde{\nu}, \quad \forall n, \quad |X_k(n)| \leq C|Y_k(n)|.$$

La constante  $C$  dépend donc éventuellement de  $t$  mais ni de  $n$ , ni de  $k$ , moyennant la condition :  $\nu_k \geq \tilde{\nu}$ . On a (dans tous les calculs qui suivent on omet les indices  $n$  pour alléger les notations) :

$$(48) \quad \overbrace{\operatorname{Re} \int T_k \mathbf{w}_k \overline{\mathbf{w}'_k} r^{1-t} \varphi \, dr}^I = -\overbrace{\operatorname{Re} h^2 \int \mathbf{w}'_k \overline{\mathbf{w}'_k} r^{1-t} \varphi \, dr}^{I_1} \\ + \underbrace{\operatorname{Re} h^2 b_k \int \mathbf{w}_k \overline{\mathbf{w}'_k} r^{-1-t} \varphi \, dr}_{I_2} + \underbrace{\operatorname{Re} h^2 \int V \mathbf{w}_k \overline{\mathbf{w}'_k} r^{1-t} \varphi \, dr}_{I_3} + \underbrace{\operatorname{Im} h \alpha \int \mathbf{w}_k \overline{\mathbf{w}'_k} r^{1-t} \varphi \, dr}_{I_4}$$

Remarquons que par les estimations (43), et l'hypothèse (46) sur le paramètre  $t$ , toutes ces intégrales sont absolument convergentes. On a :

$$I_1 = -\frac{1}{2} h^2 \int \frac{d}{dr} |\mathbf{w}'_k|^2 r^{1-t} \varphi \, dr \\ |\mathbf{w}'_k|^2 \lesssim r^{2\sigma_k - 1}, \quad \frac{d}{dr} |\mathbf{w}'_k|^2 \lesssim r^{2\sigma_k - 2}, \quad r \rightarrow 0.$$

D'après la remarque 3.10 et la condition  $2\tilde{\sigma} - t > 0$ , on peut intégrer par parties :

$$(49) \quad I_1 = \underbrace{\frac{(1-t)}{2} h^2 \int |\mathbf{w}'_k|^2 r^{-t} \varphi \, dr}_{I_{1a}} + \underbrace{\frac{1}{2} h^2 \int |\mathbf{w}'_k|^2 r^{1-t} \varphi' \, dr}_{O(\gamma_k^2(n))}.$$

Pour majorer le dernier terme on a utilisé que la dérivée de  $\varphi$  est nulle près de 0. En raisonnant de la même manière pour justifier les intégrations par parties, on obtient :

$$(50) \quad I_2 = \frac{h^2}{2} b_k \int \frac{d}{dr} |\mathbf{w}_k|^2 r^{-1-t} \varphi \, dr \\ I_2 = \underbrace{\frac{(1+t)}{2} h^2 b_k \int |\mathbf{w}_k|^2 r^{-2-t} \varphi \, dr}_{I_{2a}} - \underbrace{\frac{h^2}{2} b_k \int |\mathbf{w}_k|^2 r^{-1-t} \varphi' \, dr}_{O(h^2(1+\nu_k^2)\beta_k^2)}$$

Par la majoration (7) sur  $V$ , on a :

$$\begin{aligned}
|I_3| &\leq h^2 \int \frac{C_V}{r^2} |w_k| |w'_k| r^{1-t} \varphi \, dr \\
&\leq C_V \left\{ \int \frac{h^2}{r^2} |w_k|^2 r^{-t} \varphi \, dr \right\}^{1/2} \left\{ \int h^2 |w'_k|^2 r^{-t} \varphi \, dr \right\}^{1/2} \\
(51) \quad |I_3| &\leq \frac{C_V}{2} \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \int \frac{h^2}{r^2} |w_k|^2 r^{-t} \varphi \, dr + \varepsilon \int h^2 |w'_k|^2 r^{-t} \varphi \, dr \right\}
\end{aligned}$$

Enfin, on a les majorations simples :

$$\begin{aligned}
(52) \quad I_4 &= O(\alpha \gamma_k \beta_k), \\
I &= \int T_k w_k \bar{w}'_k r^{1-t} \varphi \, dr = \int e^{i\frac{r}{h}} h g_k \bar{w}'_k r^{1-t} \varphi \, dr = O(\kappa_k \gamma_k),
\end{aligned}$$

Prenons  $\varepsilon$  assez petit pour que  $\frac{1-t}{2} > \frac{C_V \varepsilon}{2}$ , ce qui est possible car  $t < 1$ , puis choisissons  $\tilde{\nu}$  tel que :

$$\nu_k \geq \tilde{\nu} \Rightarrow b_k > \frac{C_V}{2\varepsilon}.$$

Les deux termes principaux de (49) et (50),  $I_{1a}$  et  $I_{2a}$  dominent donc  $I_3$  et on obtient, par (48), (49), (50), (51), (52), l'inégalité (47). On va maintenant en déduire, en utilisant à nouveau l'équation (45) sur  $w_k$  la conclusion du lemme 3.9. On a :

$$\begin{aligned}
(53) \quad J &:= \text{Im} \int T_k w_k \bar{w}'_k r^{1-t} \varphi \, dr \\
&= \underbrace{-h^2 \text{Im} \int w'_k \bar{w}_k r^{1-t} \varphi \, dr}_{J_1} + \underbrace{\alpha h \int |w_k|^2 r^{1-t} \varphi \, dr}_{J_2} + \underbrace{2h \text{Re} \int w'_k \bar{w}_k r^{1-t} \varphi \, dr}_{J_3}.
\end{aligned}$$

En remarquant (les intégrations par parties se justifient comme précédemment) :

$$\begin{aligned}
J &= O(h \kappa_k \beta_k) \\
J_1 &= 2 \text{Im} (1-t) h^2 \int w'_k \bar{w}_k r^{-t} \varphi \, dr + O(h \beta_k \gamma_k) \\
|J_1| &\leq Ch \left\{ \int h^2 |w'_k|^2 r^{-t} \varphi \, dr \right\}^{1/2} \left\{ \int |w_k|^2 r^{-t} \varphi \, dr \right\}^{1/2} + O(h \beta_k \gamma_k) \\
J_2 &= O(h \beta_k^2) \\
J_3 &= h \int \frac{d}{dr} |w_k|^2 r^{1-t} \varphi \, dr \\
&= (t-1) h \int |w_k|^2 r^{-t} \varphi \, dr + O(h \beta_k^2)
\end{aligned}$$

En utilisant (47) pour majorer  $J_1$ , on déduit de (53) :

$$\int |w_{kn}|^2 r^{-t} \, dr = O(M_k^2(n)).$$

En repassant à  $u_{kn} = e^{-ir/h} r^{(d-1)/2} w_{kn}$ , puis en sommant sur tous les  $k$  tels que  $\nu_k \geq \tilde{\nu}$ , et en utilisant la majoration (44) de la somme des  $M_k^2$ , on obtient exactement (41).  $\square$

**Lemme 3.11.** Soient :  $l > 0$ ,  $q_1, q_2 \in L_{\text{loc}}^\infty ]0, l[, \mathbb{R}$  tels que :

$$(54) \quad q_1(r) \geq \frac{b}{r^2}, \quad b > -\frac{1}{4}$$

$$(55) \quad |q_j(r)| \leq \frac{C}{r^2}, \quad j = 1, 2.$$

Alors l'équation différentielle :

$$(56) \quad y''(r) = (q_1(r) + iq_2(r))y(r), \quad r \in ]0, l],$$

admet une base de solutions  $(y_+, y_-)$  telle que :

$$(57) \quad \left(\frac{d}{dr}\right)^j y_+(r) \underset{r \rightarrow 0}{\lesssim} r^{1/2 + \sqrt{B} - j}, \quad j = 0, 1, 2$$

$$(58) \quad y_-(r) \underset{r \rightarrow 0}{\gtrsim} r^{1/2 - \sqrt{B}}$$

*Démonstration.* Posons :

$$r = e^{-s}, \quad y(r) = e^{-s/2} z(s) = r^{1/2} z(-\log r).$$

L'équation différentielle (56) et les hypothèses (54) et (55) s'écrivent :

$$(56') \quad z'' = \underbrace{(1/4 + e^{-2s} q_1(e^{-s}))}_{Q_1(s)} z + \underbrace{ie^{-2s} q_2(e^{-s})}_{Q_2(s)} z, \quad s \geq L := -\log l$$

$$(54') \quad Q_2(s) \geq B := b + 1/4 > 0$$

$$(55') \quad |Q_j(s)| \leq C, \quad j = 1, 2.$$

On s'inspire de [12, Chap. II Ex. 14]. Soit  $z$  une solution de (54') et  $Z = |z|^2$ . Alors, en utilisant (56') et (54'), on obtient :

$$\begin{aligned} Z'(s) &= 2\text{Re}(z(s)\overline{z'(s)}) \\ Z''(s) &= 2|z'(s)|^2 + 2Q_1(s)|z(s)|^2 \\ &\geq 2\sqrt{B} \left( \frac{1}{\sqrt{B}} |z'(s)|^2 + \sqrt{B} |z(s)|^2 \right) \\ (59) \quad Z''(s) &\geq 2\sqrt{B} Z'(s). \end{aligned}$$

On commence par construire la solution  $z_-$  correspondant à  $y_-$ , en choisissant la solution de (56') telle que  $z_-(L) = z'_-(L) = 1$ . Il est facile de voir, avec (59) que  $Z_-$  et  $Z'_-$  restent supérieur à 1 et croissantes. Par le lemme de Gronwall, (59) implique :

$$\begin{aligned} Z'_-(s) &\geq e^{2\sqrt{B}(s-L)} Z'_-(L) \\ Z_-(s_0) &\geq Z'_-(L) \frac{1}{2\sqrt{B}} e^{2\sqrt{B}(s_0-L)} + Z_-(L), \\ (60) \quad z_-(s) &\underset{s \rightarrow +\infty}{\gtrsim} e^{\sqrt{B}s} \end{aligned}$$

ce qui démontre la condition (58) sur  $y_-(r) = r^{1/2} z_-(-\log r)$ . On construit ensuite  $z_+$ , comme la solution de (56') définie par :

$$z_+(s) := z_-(s) \int_s^{+\infty} \frac{d\sigma}{z_-^2(\sigma)}.$$

On a :

$$\begin{aligned} |z_+(s)| &\leq |z_-(s)| \int_s^{+\infty} \frac{d\sigma}{|z_-(\sigma)|^2} \\ &\leq \int_s^{+\infty} \frac{d\sigma}{|z_-(\sigma)|}, \end{aligned}$$

car  $|z_+|$  est croissante puisque  $Z_+$  l'est. Donc, grâce à (60) :

$$(61) \quad z_+(s) \lesssim_{s \rightarrow +\infty} e^{-\sqrt{B}s},$$

et par l'équation (56') et les hypothèses sur  $Q_1$  et  $Q_2$  la même propriété est vraie pour la dérivée seconde de  $z_+$ . Il est bien connu que cela implique aussi (61) pour la dérivée première de  $z_+$ . Les estimations (57) sur  $y_+(r) = r^{1/2}z_+(-\log(r))$  en découlent immédiatement.  $\square$

**3.4. Fin de la démonstration dans le cas multi-polaire.** Dans cette partie, on achève la preuve du théorème dans le cas  $N \geq 2$  en montrant :

**Proposition 3.12.** *Supposons (4), ..., (9). Soit  $p \in \mathcal{P}$  et  $\tilde{\mathcal{P}}_p$  l'ensemble des pôles  $p'$ , distincts de  $p$ , et tels que  $\mu$  ne soit pas nulle au voisinage de  $p'$ . On suppose que  $\mu$  n'est pas nulle près de  $p$ . Alors  $p$  appartient à l'enveloppe convexe de  $\tilde{\mathcal{P}}_p$ .*

Considérons  $\tilde{\mathcal{P}}$  l'ensemble des pôles près desquels la mesure n'est pas nulle. Supposons  $\tilde{\mathcal{P}}$  non vide. Le bord de l'enveloppe convexe de  $\tilde{\mathcal{P}}$  est alors un polygône dont les sommets sont des points de  $\tilde{\mathcal{P}}$ . En appliquant la proposition 3.12 à un tel sommet, on obtient une contradiction qui montre que  $\tilde{\mathcal{P}}$  est vide et donc que  $\mu$  est nulle, ce qui prouve le théorème 1.

*Démonstration.* On suppose encore  $p = 0$  et on reprend les notations des deux parties précédentes. Puisque d'après la proposition 3.7,  $\mu$  ne charge pas 0, la formule (25) peut se réécrire :

$$(25') \quad \langle \mu_{\mathfrak{g}}, a \rangle = \langle \mu, a \rangle = \sum_{p_j \in \tilde{\mathcal{P}}_0} \int_0^{+\infty} (\lambda_i^+ a(x = tZ_i, \xi = Z_i) + \lambda_i^- a(x = tZ_i, \xi = -Z_i)) dt$$

$$a \in C_0^\infty(\{x \in \mathbb{R}^d, |x| \leq l\} \times \mathbb{R}_\xi^d),$$

où les  $\lambda_i^\pm$  sont des constantes positives. On commence par démontrer, près de 0, l'équivalent du lemme 3.4 d'invariance globale :

**Lemme 3.13.** *Les rayons rentrant en 0 et sortant de 0 portent la même masse :*

$$(62) \quad \sum_{p_j \in \tilde{\mathcal{P}}_0} \lambda_j^- = \sum_{p_j \in \tilde{\mathcal{P}}_0} \lambda_j^+ =: \Lambda.$$

*Démonstration.* On se donne une fonction  $\varphi \in C_0^\infty(\{|x| < l\})$ , positive, radiale, décroissante en  $r$  et valant 1 près de 0. On a :

$$S_n := h_n^{-1} (h_n^2 P u_n - u_n, \varphi u_n)_{L^2} - h_n^{-1} (\varphi u_n, h_n^2 P u_n - u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Mais :

$$\begin{aligned} S_n &= h_n Q(u_n, \varphi u_n) - Q(\varphi u_n, u_n) \\ &= h_n \int (\nabla u_n \cdot \nabla \varphi) \bar{u} dx - h_n \int u_n \nabla \varphi \cdot \nabla \bar{u}_n dx \\ &= 2i \operatorname{Im} \int h_n \nabla u_n \cdot \nabla \varphi \bar{u}_n dx. \end{aligned}$$

La suite  $(u_n)$  étant  $h_n$ -oscillante, il est facile de montrer :

$$0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 2i \operatorname{Im} \langle \mu, i\xi \cdot \nabla \varphi \rangle$$

On en déduit, en utilisant l'expression (25') :

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{p_j \in \tilde{\mathcal{P}}_0} \int_0^{+\infty} \left( \lambda_i^+ \frac{d\varphi}{dr}(r=t) - \lambda_i^- \frac{d\varphi}{dr}(r=t) \right) dt \\ &= - \sum_{p_j \in \tilde{\mathcal{P}}_0} \lambda_i^+ + \sum_{p_j \in \tilde{\mathcal{P}}_0} \lambda_i^-. \end{aligned}$$

□

On écrit maintenant une variante du lemme 3.9, qui utilise l'hypothèse (8) faite sur la dérivée de  $V$  :

**Lemme 3.14.** Soit  $c_d = \frac{(d-1)(d-3)}{4}$ . Alors :

$$(63) \quad \left( c_d + \tilde{\nu} - \frac{C'_V}{2} \right) \limsup_{n \rightarrow +\infty} \int \frac{h_n^2}{|x|^3} |u_{\mathfrak{g}n}|^2 dx \leq 2\Lambda.$$

**Remarque 3.15.** Le lemme 3.14 est similaire à la majoration intermédiaire (47) du lemme 3.9, avec  $t = 1$ , mais on ne peut pas démontrer la majoration correspondante de la dérivée radiale de  $u_{\mathfrak{g}}$ , (à cause de la constante  $1 - t$  dans (49) qui s'annule lorsque  $t = 1$ ) :

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \int \frac{h_n^2}{|x|} \left| \frac{\partial u_{\mathfrak{g}n}}{\partial r} \right|^2 dx < +\infty.$$

De même, on ne peut malheureusement pas aboutir par cette méthode à la conclusion (41) du lemme 3.9 dans le cas  $t = 1$ , c'est à dire montrer :

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \int |x|^{-1} |u_{\mathfrak{g}n}|^2 dx < +\infty.$$

Notons que cette dernière propriété, avec la formule (25') et la non-intégrabilité en 0 de l'application  $r \mapsto 1/r$ , impliquerait directement la nullité de  $\mu$  près de 0.

**Remarque 3.16.** Le lemme 3.14 correspond à un gain d'une demi puissance de  $r$  par rapport à la borne naturelle :

$$\frac{h_n}{r} u_n = O(1) \text{ dans } L_{\text{loc}}^2.$$

Dans la suite, la fonction  $h_n^{3/2} r^{-1} u_n$ , jouera, près 0, un rôle similaire à celui que jouerait une trace dans un problème au bord. On peut comparer le gain de  $r^{-1/2}$  donné par (63) au gain d'une demi-dérivée par rapport au théorèmes de traces standard obtenu sur les traces d'un problème au bord avec des "bonnes" conditions au bord.

*Démonstration.* On se donne  $k$  tel que  $\nu_k \geq \tilde{\nu}$ , et on reprend la démonstration du lemme 3.9, mais avec  $t = 1$ . La formule (48) est encore valable et s'écrit :

$$(48') \quad \underbrace{\operatorname{Re} \int T_k w_k \overline{w'_k} \varphi dr}_I = - \operatorname{Re} h^2 \underbrace{\int w'_k \overline{w'_k} \varphi dr}_{I_1} \\ + \operatorname{Re} h^2 b_k \underbrace{\int w_k \overline{w'_k} r^{-2} \varphi dr}_{I_2} + \operatorname{Re} h^2 \underbrace{\int V w_k \overline{w'_k} \varphi dr}_{I_3} + \operatorname{Im} h \alpha \underbrace{\int w_k \overline{w'_k} \varphi dr}_{I_4}.$$

Toutes les intégrales écrites sont absolument convergentes grâce aux estimations (43). Par des intégrations par parties élémentaires, que l'on justifie encore par la remarque 3.10, on calcule :

$$(64) \quad I_1(k, n) = \frac{1}{2} \int h^2 |w'_k|^2 \varphi'(r) dr$$

$$(65) \quad I_2(k, n) = \underbrace{\int h^2 b_k |w_k|^2 r^{-3} \varphi dr}_{I_{2a}} + \underbrace{\int -\frac{h^2 \nu_k^2}{r^2} |w_k|^2 \varphi'(r) dr}_{I_{2b}} + O(h^2 \beta_k^2).$$

$$I_3(k, n) = -\frac{h^2}{2} \int \frac{dV}{dr} |w_k|^2 \varphi dr + O(h^2 \beta_k^2)$$

$$(66) \quad |I_3(k, n)| \leq \frac{C'_V}{2} \int \frac{h^2}{r^3} |w_k|^2 \varphi dr + O(h^2 \beta_k^2)$$

$$(67) \quad I_4(k, n) = O(\alpha \gamma_k \beta_k).$$

Notons :

$$\mathcal{I}_j(n) := \sum_{\nu_k \geq \tilde{\nu}} I_j(k, n), \quad \mathcal{I}_{2a,b}(n) := \sum_{\nu_k \geq \tilde{\nu}} I_{2a,b}(k, n).$$

En sommant par rapport à l'indice  $k$ , on a facilement les estimations :

$$(68) \quad \mathcal{I}_{2a}(n) \geq (\tilde{\nu} + c_d) \int \frac{h_n^2}{|x|^3} |u_{gn}|^2 \varphi dx$$

$$(69) \quad |\mathcal{I}_3(n)| \leq \frac{C'_V}{2} \int \frac{h_n^2}{|x|^3} |u_{gn}|^2 \varphi dx + o(1), \quad n \rightarrow +\infty$$

$$(70) \quad \mathcal{I}_4(n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Il reste à étudier  $\mathcal{I}_1$  et  $\mathcal{I}_{2b}$ , dont on peut calculer la limite quand  $n$  tend vers  $+\infty$  en utilisant la formule (25'). On a :

$$e^{-ir/h} r^{-\frac{d-1}{2}} h w'_k = e^{-ir/h} r^{-\frac{d-1}{2}} h \frac{d}{dr} \left( e^{ir/h} r^{\frac{d-1}{2}} u_k \right) = h u'_k + i u_k + h \frac{d-1}{2r} u_k.$$

En sommant par rapport à  $k$ , on obtient :

$$(71) \quad \mathcal{I}_1(n) = \frac{1}{2} \int \left| h \frac{\partial u_g}{\partial r} + i u_g \right|^2 \varphi'(|x|) dx + o(1), \quad n \rightarrow +\infty.$$

Posons :

$$\begin{aligned} A &:= h \frac{\partial}{\partial r} + i, & \tilde{A} &:= \tilde{\varphi}(x) A \psi(hD), \\ \tilde{\varphi} &\in C_0^\infty(\mathbb{R}^d), & \tilde{\varphi} &= 1 \text{ sur } \text{supp } \varphi', \\ \psi &\in C_0^\infty(\mathbb{R}^d), & \psi(\xi) &= 1 \text{ sur } \{|\xi| = 1\} \end{aligned}$$

Les suites  $(u_{gn})$  et  $(h_n \nabla u_{gn})$  étant  $h_n$ -oscillantes sur le support de  $\varphi'$ , et le support de la mesure  $\mu_g$  étant inclus dans l'ensemble  $\{|\xi| = 1\}$ , on montre facilement les convergences  $L^2$  :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{1}_{\text{supp } \varphi'} (\psi(h_n D) u_{gn}) = 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{1}_{\text{supp } \varphi'} (\psi(h_n D) \nabla u_{gn}) = 0.$$

Et donc :

$$\lim_{n \rightarrow 0} (\tilde{A} - A) u_{gn} = 0 \text{ dans } L^2(\text{supp } \varphi').$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_1(n) &= \frac{1}{2} \left( \tilde{A}^* \varphi'(|x|) \tilde{A} u_{\mathfrak{g}n}, \tilde{u}_{\mathfrak{g}n} \right)_{L^2} + o(1) \\
\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{I}_1(n) &= \left\langle \mu, \frac{1}{2} \psi(\xi) \left| i \xi \cdot \frac{x}{|x|} + i \right|^2 \varphi'(|x|) \right\rangle \\
&= \sum_{p_j \in \tilde{\mathcal{P}}_0} \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \lambda_i^+ 2^2 \varphi'(t) dt \\
(72) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{I}_1(n) &= 2\Lambda,
\end{aligned}$$

où aux deux dernières lignes, on a utilisé la formule (25'), la définition (62) de  $\Lambda$  et le fait que  $\varphi(0) = 1$ . D'autre part :

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{2b}(n) &= \sum_{\nu_k \geq \tilde{\nu}} -\frac{h_n^2 \nu_k^2}{2} \int |w_{kn}|^2 r^{-2} \varphi'(r) dr = \sum_{\nu_k \geq \tilde{\nu}} -\frac{h_n^2 \nu_k^2}{2} \int \frac{1}{|x|^2} |u_{kn}|^2 \varphi'(|x|) dx \\
&= \int -\frac{h_n^2}{2} |\nabla_T u_{\mathfrak{g}n}|^2 \varphi'(|x|) dx
\end{aligned}$$

où  $\nabla_T$  désigne le gradient tangentiel :

$$\nabla_T U = \nabla U - \left( \frac{\partial U}{\partial r} \right) \frac{x}{|x|}.$$

La limite de ce terme, quand  $n$  tend vers l'infini, est donc, par un raisonnement analogue au précédent :

$$(73) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{I}_{2b}(n) = \left\langle \mu, \frac{1}{2} \varphi'(|x|) \left| \xi - (x \cdot \xi) \frac{x}{|x|^2} \right|^2 \right\rangle,$$

qui vaut 0 car  $\mu_{\mathfrak{g}}$  est nulle lorsque  $\xi$  n'est pas parallèle à  $x$ . En remarquant :

$$\mathcal{I}(n) := \sum_{j=1}^4 \mathcal{I}_j(n) = o(1), \quad n \rightarrow +\infty,$$

et en additionnant (68), (69), (70), (72), (73) on obtient (63). □

Introduisons maintenant le réel positif  $l_{\mathfrak{g}}$ , défini par :

$$l_{\mathfrak{g}} := \limsup_{n \rightarrow +\infty} \int_{r \leq 1} \frac{h_n^2}{|x|^3} |u_{\mathfrak{g}n}|^2 dx.$$

D'après le lemme précédent, on a, dès que  $\tilde{\nu}$  est assez grand :

$$(74) \quad 0 \leq l_{\mathfrak{g}} \leq \frac{2\Lambda}{c_d + \tilde{\nu}^2 - \frac{C'_V}{2}}$$

Les  $\lambda_j^+$  et les  $\lambda_j^-$  vont désormais jouer des rôles symétriques. La mesure  $\mu$  étant non nulle au voisinage de 0, on sait que  $\Lambda$  est strictement positif et on peut donc poser :

$$\begin{aligned}
2\Lambda t_j &:= \lambda_j^+ + \lambda_j^-, \quad \sum_{p_j \in \tilde{\mathcal{P}}_0} t_j = 1, \quad 0 \leq t_j \leq 1 \\
Z &:= \sum_{p_j \in \tilde{\mathcal{P}}_0} t_j Z_j,
\end{aligned}$$

Si l'on suppose que 0 n'appartient pas à l'enveloppe convexe de  $\tilde{\mathcal{P}}_0$ , le vecteur  $Z$  (qui ne dépend pas de  $\tilde{\nu}$  d'après la proposition (3.5)), est non nul. Notons que si  $\mu$  était invariante par le flot hamiltonien, y compris

le long des rayons passant par le pôle, on aurait  $Z = 0$ . Cette invariance se démontre habituellement en calculant le commutateur  $C = [-h^2P, A]$ , où  $A$  est un opérateur semi-classique  $a(x, hD)$ ,  $a \in C_0^\infty$ . Dans notre cas,  $C$  ne peut pas s'estimer, car le potentiel  $V$  commute très mal avec de tels opérateurs. Pour contourner ce problème, on remplace  $A$  par un opérateur différentiel de degré 1 dont on peut exprimer exactement le commutateur avec  $V$  en fonction de la dérivée de  $V$ . L'hypothèse (8), et l'estimation (74) sur  $l_{\mathfrak{g}}$  permettent alors de maîtriser suffisamment  $C$  pour montrer que  $Z = 0$ . Ce résultat est plus faible que le théorème d'invariance près du pôle, mais suffit pour démontrer la proposition 3.12.

**Lemme 3.17.**

$$(75) \quad 4\Lambda|Z| \leq \sqrt{d}C'_V l_{\mathfrak{g}}$$

*Démonstration.* Remarquons d'abord que  $P$ , qui est un opérateur borné de son domaine  $D(P)$  dans  $L^2$ , définit par dualité un opérateur  $\tilde{P}$  borné de l'espace  $L^2$  dans  $D(P)^*$  :

$$(\tilde{P}F, G)_{D(P)^*, D(P)} = (F, PG)_{L^2}, \quad F \in L^2, \quad G \in D(P).$$

De plus,  $D(P)$  contient l'espace de fonctions test  $C_0^\infty(\mathbb{R}^d \setminus \mathcal{P})$ , donc  $D(P)^*$  est un sous-espace de l'espace de distributions  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d \setminus \mathcal{P})$ , et, d'après la proposition 2.3 :

$$\tilde{P}F = -\Delta F + VF \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d \setminus \mathcal{P}).$$

Soit  $\Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_d)$  un champ de vecteurs  $C^\infty$  à support compact dans un petit voisinage de  $x = 0$  sur  $\mathbb{R}^d$ , qui près de 0 est constant et égal au vecteur  $(1, \dots, 1)$ . Soit  $j$  un entier compris entre 1 et  $d$ . On sait que la suite  $(h_n \Phi_j \partial_{x_j} u_{\mathfrak{g}n})_n$  est bornée dans  $L^2$ . On en déduit :

$$\begin{aligned} \left( (h_n^2 \tilde{P} - 1) \Phi_j \partial_{x_j} u_{\mathfrak{g}n}, u_{\mathfrak{g}n} \right) &= (\Phi_j \partial_{x_j} u_{\mathfrak{g}n}, (h_n^2 P - 1) u_{\mathfrak{g}n}) \\ &= o(1), \quad n \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} (\Phi_j \partial_{x_j} (h_n^2 P - 1) u_{\mathfrak{g}n}, u_{\mathfrak{g}n}) &= -((h_n^2 P - 1) u_{\mathfrak{g}n}, \partial_{x_j} (\Phi_j u_{\mathfrak{g}n})) \\ &= o(1), \quad n \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Et donc :

$$(76) \quad \mathcal{C} := \left( \Phi_j \partial_{x_j} h^2 P u_{\mathfrak{g}} - h^2 \tilde{P} \Phi_j \partial_{x_j} u_{\mathfrak{g}}, u_{\mathfrak{g}} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Dans (76), le produit scalaire est bien défini au sens de la dualité entre  $D(P)^*$  et  $D(P)$ . On peut exprimer  $\mathcal{C}$  en fonction de  $\mu$  et d'un terme dominé par  $l_{\mathfrak{g}}$  à l'infini :

$$(77) \quad \mathcal{C} = \left( [\Phi_j \partial_{x_j}, h^2(-\Delta + V)u_{\mathfrak{g}}], u_{\mathfrak{g}} \right)$$

$$(78) \quad \left( [\Phi_j \partial_{x_j}, -h^2 \Delta] u_{\mathfrak{g}}, u_{\mathfrak{g}} \right) = \underbrace{2h^2 (\nabla \Phi_j \cdot \nabla \partial_{x_j} u_{\mathfrak{g}}, u_{\mathfrak{g}})}_{\rightarrow \langle \mu, 2\xi \cdot \nabla \Phi_j \xi_j \rangle} + o(1) \quad n \rightarrow +\infty$$

$$(79) \quad \begin{aligned} \left| \left( h^2 [\Phi_j \partial_{x_j}, V] u_{\mathfrak{g}}, u_{\mathfrak{g}} \right) \right| &= \left| h^2 (\Phi_j (\partial_{x_j} V) u_{\mathfrak{g}}, u_{\mathfrak{g}}) \right| \\ &\leq C'_V l_{\mathfrak{g}} + o(1) \quad n \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

où à la dernière ligne on a utilisé l'hypothèse (8) et la définition de  $l_{\mathfrak{g}}$ . Finalement, on remarque que d'après (25'), et puisque  $\Phi_j(0) = 1$ ,

$$\langle \mu, 2\xi \cdot \nabla \Phi_j \xi_j \rangle = -4\Lambda Z \cdot e_j,$$

où  $e_j$  est le vecteur unitaire dont la  $j$ -ième coordonnée vaut 1. En utilisant (76),(77),(78),(79), on obtient :

$$4\Lambda|Z \cdot e_j| \leq C'_V l_{\mathfrak{g}},$$

dont on déduit (75) en sommant les carrés.  $\square$

En utilisant (74) et le lemme 3.17, on obtient :

$$4\Lambda|Z| \leq \sqrt{d}C'_V \frac{2\Lambda}{c_d + \tilde{\nu}^2 - \frac{C'_V}{2}}.$$

Or  $Z$  ne dépend pas de  $\tilde{\nu}$ , que l'on peut prendre aussi grand que l'on veut. On a donc  $Z = 0$ , ce qui montre que le pôle 0 est un barycentre des directions  $Z_j$  correspondant au pôles  $p_j$  qui appartiennent à  $\tilde{\mathcal{P}}_0$ . On peut en déduire facilement que 0 est dans l'enveloppe convexe de  $\tilde{\mathcal{P}}_0$ , ce qui démontre la proposition 3.12.  $\square$

#### 4. UNE VARIANTE DU THÉORÈME 1

Dans cette section, on écrit une généralisation partielle du théorème 1 qui permet de considérer des potentiels de la forme :

$$\frac{1}{|x - p_j|^2} a_j \left( \frac{x - x_j}{|x - x_j|^2} \right), \quad a_j + \left( \frac{d}{2} - 1 \right)^2 > 0$$

près de chaque pôle  $p_j$ . Nous précisons ensuite les modifications à apporter à la démonstration du théorème 1 pour démontrer ce résultat.

**Théorème 2.** *Soit  $\mathcal{P} = \{p_1, \dots, p_N\}$  un ensemble de pôles sur  $\mathbb{R}^d$  et  $P = -\Delta + V$ , où  $V$  est un potentiel réel sur  $\mathbb{R}^d$  tel que :*

$$V = V_1 + V_2,$$

avec :

- $V_1$  vérifiant les hypothèses (4), ..., (9) du théorème 1,
- $V_2 \in L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}^d \setminus \mathcal{P})$ , à support compact sur  $\mathbb{R}^d$  et tel que, si  $|x - p_j| \leq l$  :

$$(80) \quad V_2(x) = \frac{1}{|x - p_j|^2} b_j \left( \frac{x - x_j}{|x - x_j|^2} \right), \quad b_j \in L^\infty(S^{d-1})$$

$$(6') \quad b_j \geq 0,$$

$$(8') \quad \nabla_\theta b_j \in L^\infty(S^{d-1}).$$

Alors la conclusion du théorème 1 reste valide : si  $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ ,

$$(81) \quad \exists \lambda_0 > 0, \exists C > 0, \forall \lambda > \lambda_0, \forall \varepsilon > 0, \quad \|\chi R_{\lambda \pm i\varepsilon} \chi\|_{L^2 \rightarrow L^2} \leq \frac{C}{\sqrt{\lambda}}.$$

De plus, comme dans le théorème 1, si  $N = 1$ , (81) reste vraie sans les hypothèses (8) et (8') faites sur le gradient de  $V$ .

**Remarque 4.1.** Un tel  $V$  vérifie les hypothèses (4), ..., (7) du théorème 1, ce qui permet de définir comme dans la section 2, l'opérateur  $P$  qu sens des formes quadratiques.

**Remarque 4.2.** Dans le cas unipolaire, les potentiels de la forme :

$$V(r, \theta) = \chi(x) \frac{a(\theta)}{r^2}, \quad a \in L^\infty(S^{d-1}), \quad a(\theta) \geq a_0, \quad a_0 + (d/2 - 1)^2 > 0,$$

où  $\chi$  est une fonction à support compact valant 1 près de 0, rentrent dans le cadre du théorème 2. Contrairement aux résultats connus jusqu'alors, on ne fait aucune hypothèse dans ce cas sur la dérivée du potentiel près du pôle, ce qui est naturel : on n'a pas besoin d'une telle condition pour que  $P$  soit positif. Malheureusement, comme dans le cas radial, les conditions sur  $|\nabla V|$  réapparaissent lorsque  $N \geq 2$  pour éliminer les rayons éventuels entre les pôles du support de  $\mu$ .

*Démonstration.* On reprend point par point la démonstration du théorème 1 de la section 3.

La partie 3.1, qui ne nécessite que les hypothèses (4), ..., (7), reste valable.

On se place ensuite près d'un pôle  $p_{j_0}$  que l'on prend comme origine du repère. L'équation sur  $u_n$  s'écrit, en coordonnées polaires au voisinage de ce pôle :

$$-h_n^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} u_n - h_n^2 \frac{d-1}{r} \frac{\partial}{\partial r} u_n + h_n^2 V_1(r) u_n - \frac{h_n^2}{r^2} \Delta_\theta u_n + \frac{b_j(\theta)}{r^2} u_n = h_n \chi f_n,$$

où on a noté  $\Delta_\theta$  le Laplacien sur la sphère  $S^{d-1}$ . On considère alors l'opérateur sur  $L^2(S^{d-1})$  :

$$H = -\Delta_\theta + b_j(\theta), \quad D(H) = H^2(S^{d-1}).$$

La fonction  $b_j$  étant positive est bornée, il est facile de voir que  $H$  est un opérateur auto-adjoint positif à résolvante compacte. Il admet donc une famille de vecteur propre formant une base hilbertienne de l'espace  $L^2(S^{d-1})$  :

$$e_k^* \in C^1(S^{d-1}), \quad H e_k^* = \nu_k^{*2} e_k^* \\ \nu_{k+1}^* \geq \nu_k^* \geq \nu_0^* \geq 0, \quad \nu_k^* \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} +\infty$$

On décompose, comme dans la partie 3.2 chacune des fonctions  $u_n$  et  $f_n$  selon ces fonctions propres :

$$u_n(x) = \sum_{k \in \mathbb{N}} u_{kn}^*(r) e_k^*(\theta), \quad f_n(x) = \sum_{k \in \mathbb{N}} f_{kn}^*(r) e_k^*(\theta).$$

Puis, ayant fixé un entier naturel  $\tilde{\nu}$ , on regroupe à nouveau selon les grandes et les petites valeurs propres :

$$u_n = u_{pn}^* + u_{gn}^*, \quad u_{pn}^* \stackrel{def}{=} \sum_{\nu_k^* \leq \tilde{\nu}} u_{kn}^* e_k^*, \quad u_{gn}^* \stackrel{def}{=} \sum_{\nu_k^* > \tilde{\nu}} u_{kn}^* e_k^* \\ f_n = f_{pn}^* + f_{gn}^*, \quad f_{pn}^* \stackrel{def}{=} \sum_{\nu_k^* \leq \tilde{\nu}} f_{kn}^* e_k^*, \quad f_{gn}^* \stackrel{def}{=} \sum_{\nu_k^* > \tilde{\nu}} f_{kn}^* e_k^*.$$

Les parties 3.2, 3.3, 3.4 de la démonstration fonctionne alors parfaitement en remplaçant les  $e_k$  par les  $e_k^*$ , et les décompositions en harmoniques sphériques par les décompositions correspondantes associées aux  $e_k^*$ . Remarquons que l'équation sur  $u_k^*$  près du pôle s'écrit :

$$-h_n^2 u_k^{*''} - h_n^2 \frac{d-1}{r} u_k^{*'} + h_n^2 \left( V_1(r) + \frac{\nu_k^*}{r^2} \right) u_k^* - (1 - i\alpha_n) u_k^* = h_n f_k^*.$$

Elle est donc identique à l'équation (28) vérifiée par  $u_k$  dans la démonstration du théorème 1, et en sommant ces équations, on obtient près du pôles les bonnes équations sur  $u_g^*$  et  $u_p^*$  :

$$(82) \quad h^2 P u_g^* - (1 - ih\alpha) u_g = h f_g^*, \quad h^2 P u_p^* - (1 - ih\alpha) u_p = h f_p^*.$$

Notons que dans les parties 3.2 et 3.3, les calculs se font sur chacune des harmoniques sphériques et que dans 3.4, on utilise seulement l'équation sur  $u_g$  identique à (82), et les hypothèses (7) et (8) sur  $V$ , qui sont encore valables ici grâce aux hypothèses (7) et (8) sur  $V_1$ , et (80), (8') sur  $V_2$ . On n'utilise jamais directement, dans 3.4, la forme radiale de  $V$  près du pôle.  $\square$

## RÉFÉRENCES

- [1] Werner O. Amrein, Anne Boutet de Monvel, Vladimir Georgescu.  $C^0$ -groups, commutator methods and spectral theory of N-body Hamiltonians. (1996) *Progress in mathematics. Basel Boston MA Berlin Birkhuser*
- [2] Ben-Artzi, Matania; Klainerman, Sergiu. Decay and regularity for the Schrödinger equation. *J. Anal. Math.* Vol. 58, 25-37 (1992)
- [3] Nicolas Burq. Semi-classical estimates for the resolvent in non trapping geometries. *Int. Math. Res. Not.* 2002, no. 5, 221-241.
- [4] Nicolas Burq, Patrick Gérard, Nikolai Tzvetkov. On Non-Linear Schrödinger Equations in Exterior Domains. Preprint, université Paris Sud.

- [5] Nicolas Burq, Gilles Lebeau. Mesure de défaut de compacité, application au système de Lamé. *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.* (4) Vol. 34, No 6, 817-870 (2001)
- [6] Nicolas Burq, Fabrice Planchon, John G. Stalker, A. Shadi Tahvildar-Zadeh. Strichartz Estimates for the Wave and Schrödinger Equations with the Inverse-Square Potential. (2002)
- [7] Piero D'Ancona, Vittoria Pierfelice. On the wave equation with a large rough potential. Prépublication. (2003)
- [8] Thomas Duyckaerts. A Singular Critical Potential For The Schrödinger Operator. Prépublication (2003)
- [9] Clotilde Fermanian. Equation de la chaleur et mesures semi-classiques. Thèse de l'université de Paris-Sud (1995)
- [10] Christian Gérard, André Martinez. Principe d'absorption limite pour des opérateurs des Schrödinger à longue portée. *C.R.A.S. Série I, mathématiques*. 306, No 3, 121-123 (1988)
- [11] Patrick Gérard. Mesures semi-classiques et ondes de Bloch, Séminaire EDP de l'Ecole Polytechnique 16 (1990-1991)
- [12] Stéphane Gonnord, Nicolas Tosel. Calcul différentiel. *ellipses*
- [13] P. Lax, R. Phillips. Scattering Theory. *Pure and Applied Mathematics*, No 26. Academic Press, 2nde édition.
- [14] Pierre-Louis Lions et Thierry Paul. Sur les mesures de Wigner. *Revista Matemática Iberoamericana* 9, n 3, 553-618 (1993)
- [15] Cathleen S. Morawetz. The Decay for Solutions of the Exterior Initial-Boundary Value Problem for the Wave Equation. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, Vol. 14, 561-568 (1961)
- [16] Cathleen S. Morawetz. Decay for Solutions of the Exterior Problem for the Wave Equation. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, Vol. 27, 229-264 (1975).
- [17] E. Mourre. Absence of Singular Continuous Spectrum for Certain Self-Adjoint Operators. *Commun. Math. Phys.* Vol.78, 391-408 (1981)
- [18] Vittoria Pierfelice. Decay estimate for the wave equation with a small potential. Prépublication. (2003)
- [19] Fabrice Planchon, John G. Stalker, A. Shadi Tahvildar-Zadeh.  $L^p$  estimates for the wave equation with the inverse-square potential. *Discrete Contin. Dyn. Syst.* Vol. 9, No 2, 427-442 (2003)
- [20] Michael Reed, Barry Simon. Methods of modern mathematical physics. vol I Fonctionnal analysis. *Academic Press*.
- [21] Michael Reed, Barry Simon. Methods of modern mathematical physics. vol II Fourier analysis, self-adjointness. *Academic Press*, 1975.
- [22] Alberto Ruiz, Luis Vega. On Local Regularity of Schrödinger Equations. *Internat. Math. Res. Notices* 1993, 13-27.
- [23] Alberto Ruiz, Luis Vega. Local Regularity of Solutions to Wave Equations with Time-Dependent Potentials. *Duke Mathematical Journal*. Vol 76, No 3, 913-940 (1994)
- [24] András Vasy, Maciej Zworski. Semi-Classical Estimates in Asymptotically Euclidian Scattering. *Comm. Math. Phys.* Vol. 212, No 1, 205-217 (2000)