

POTENTIEL SINGULIER CRITIQUE POUR L'OPÉRATEUR DE SCHRÖDINGER

THOMAS DUYCKAERTS

RÉSUMÉ. On construit un potentiel V sur \mathbb{R}^d , régulier en dehors d'un pôle, et une suite de quasi-modes pour l'opérateur $-\Delta + V$, qui se concentre sur ce pôle. Les solutions de l'équation de Schrödinger associée ne vérifient pas d'effet régularisant local, ni d'inégalités de Strichartz ou de dispersion.

1. INTRODUCTION

On considère un opérateur de la forme :

$$(1) \quad P = -\Delta + V, \quad \Delta = \sum_{j=1}^d \frac{\partial^2}{\partial x_j^2},$$

sur \mathbb{R}^d , $d \geq 1$, où V est un potentiel réel, petit à l'infini, et l'équation de Schrödinger :

$$(2) \quad \begin{cases} i\partial_t U - PU = 0 \\ U|_{t=0} = U_0 \in L^2(\mathbb{R}^d). \end{cases}$$

Lorsque V est suffisamment régulier, l'équation (2) entraîne un effet régularisant local :

$$(3) \quad \|\chi u\|_{L^2([0,T], H^{1/2}(\mathbb{R}^d))} \leq C \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}, \quad \chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d),$$

où selon les cas T est fini ou infini, et C peut dépendre de V , χ et T . Cette estimation classique (cf [2],[6] et les références proposées dans ces deux articles) est fondamentale dans l'étude de (2) et des équations non-linéaires associées. On s'intéresse à la régularité minimale de V pour que (3) soit encore vérifiée. Dans [6], A. Ruiz et L. Vega considèrent l'équation (2) comme une perturbation de l'équation de Schrödinger libre pour démontrer (3) (en fait une inégalité plus forte). Les potentiels suivants rentrent dans ce cadre :

- $V \in L^p$, $p \geq d/2$.
- Des potentiels dans des classes de Morey-Campanato, plus larges que $L^{d/2}$, vérifiant une condition de petitesse dans ces espaces (cf [6] pour les détails). Par exemple, des potentiels admettant des singularités ponctuelles de la forme

$$(4) \quad V = \sum_{j=1 \dots N} \frac{a_j}{|x - p_j|^2} + V_0, \quad V_0 \in L^p, \quad p \geq d/2,$$

où les $|a_j|$ sont petits.

Les potentiels étudiés dans cet article peuvent aussi dépendre du temps mais nous ne développerons pas cet aspect ici. Dans [5], (voir aussi [3]), l'auteur étudie des potentiels de type (4), (avec V_0 régulier) en faisant simplement l'hypothèse de positivité sur les a_j :

$$a_j + (d/2 - 1)^2 > 0,$$

et démontre des inégalités sur la résolvante tronquée :

$$(5) \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad \operatorname{Re} \lambda^2 \geq C, \quad \operatorname{Im} \lambda^2 \neq 0, \quad \|\chi(P - \lambda^2)^{-1} \chi\|_{L^2 \rightarrow L^2} \leq \frac{C}{|\lambda|}, \quad \chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d),$$

On peut notamment en déduire des estimations de type (3) (cf [2]).

Les potentiels $V \in L^p$, $p < d/2$, et ceux de la forme de (4), mais avec des pôles d'ordre supérieur ne sont pas traités dans les travaux précités. On montre ici le caractère critique de l'espace $L^{d/2}$ et des singularités en $1/r^2$, $r = |x|$, en construisant un potentiel unipolaire V dont le pôle est de l'ordre de $|\log r|^2/r^2$ près de 0, tel que P ne vérifie ni (3) ni (5).

Théorème 1. *Soient $d \geq 1$, $N \geq 0$ des entiers. Il existe :*

– *un potentiel V sur \mathbb{R}^d , positif, radial, à support compact tel que :*

$$(6) \quad V \in C^\infty(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$$

$$(7) \quad \frac{|\log r|^2}{Cr^2} \leq V(r) \leq \frac{C|\log r|^2}{r^2}, \quad r \leq r_0.$$

– *une suite $(\lambda_n)_{n \geq n_0}$ croissante de réels strictement positifs, de limite $+\infty$;*

– *une suite de fonctions $(u_n)_{n \geq n_0}$, radiales, C^∞ , dont le support est de la forme :*

$$\left\{ c_1 \frac{\log \lambda_n}{\lambda_n} \leq r \leq c_2 \frac{\log \lambda_n}{\lambda_n} \right\};$$

tels que :

$$(8) \quad (-\Delta + V)u_n - \lambda_n^2 u_n = f_n$$

$$(9) \quad \|u_n\|_{L^1} = 1$$

$$(10) \quad \forall j \in \mathbb{N}, \left\| \frac{d^j}{dr^j} f_n \right\|_{L^\infty} = O(\lambda_n^{j-N}), \quad n \rightarrow +\infty.$$

Corollaire 1. *Soient $P = -\Delta + V$, où V est le potentiel introduit dans le théorème pour un $N \geq 2$, et $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ non nulle en 0. Alors :*

– *(absence d'inégalités de Strichartz locales)*

$$(11) \quad \forall q, q_0 \in [1, +\infty], \quad q > q_0, \quad \forall T > 0, \quad \forall C > 0, \quad \exists U_0 \in C_0^\infty, \quad \|\chi U(t)\|_{L^1([0, T], L^q(\mathbb{R}^d))} > C \|U_0\|_{L^{q_0}(\mathbb{R}^d)};$$

– *(absence d'effet régularisant local)*

$$(12) \quad \forall \sigma > 0 \quad \forall T > 0, \quad \forall C > 0, \quad \exists U_0 \in C_0^\infty, \quad \|\chi U(t)\|_{L^1([0, T], H^\sigma(\mathbb{R}^d))} > C \|U_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)};$$

– *(absence de dispersion locale)*

$$(13) \quad \forall q \in [1, +\infty], \quad \forall T > 0, \quad \forall C > 0, \quad \exists U_0 \in C_0^\infty, \quad \|\chi U(T)\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} > C \|U_0\|_{L^{q'}(\mathbb{R}^d)};$$

– *(absence d'inégalités de Strichartz locales avec perte de dérivée)*

$$(14) \quad \forall q \in [1, +\infty], \quad \forall \sigma \in [0, 1], \quad \frac{1}{2} - \frac{1}{q} > \frac{\sigma}{d},$$

$$\forall T > 0, \quad \forall C > 0, \quad \exists U_0 \in C_0^\infty, \quad \|\chi U(t)\|_{L^1([0, T], L^q(\mathbb{R}^d))} > C \|U_0\|_{D(P^{\sigma/2})}.$$

Dans les inégalités précédentes, on a noté $U(t)$ la solution de l'équation (2) de condition initiale U_0 et q' l'exposant conjugué de q défini par : $1/q + 1/q' = 1$.

Remarques. – Si $d > 2$, les hypothèses (6,7) impliquent :

$$V \in \bigcap_{p < d/2} L^p.$$

– La suite $(f_n)_{n \geq n_0}$ infirme évidemment (5) dès que $N \geq 2$.

– Il apparaîtra clairement dans la démonstration que l'on peut construire des quasi-modes d'ordre infini (c'est à dire en remplaçant $O(\lambda_n^{j-N})$ par $O(\lambda_n^{-\infty})$ dans (10)) en s'autorisant une singularité un peu plus forte :

$$\frac{|\log r|^{2+\varepsilon}}{Cr^2} \leq V(r) \leq \frac{C|\log r|^{2+\varepsilon}}{r^2}, \quad \varepsilon > 0.$$

En s'autorisant une singularité encore plus grande, on peut imposer à la suite (f_n) une décroissance exponentielle en $-\lambda_n$.

– Les inégalités de Strichartz :

$$\|u\|_{L^p([0,T],L^q(\mathbb{R}^d))} \leq C\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}, \quad p > 2, \quad \frac{2}{p} + \frac{d}{q} = \frac{d}{2},$$

sont niées par (11), sauf le cas $q = 2, p = +\infty$, trivial par conservation de la norme L^2 . De même, (14) nie les inégalités de Strichartz avec perte de dérivée (cf [2]) :

$$\|u\|_{L^p([0,T],L^q(\mathbb{R}^d))} \leq C\|u_0\|_{D(P^{\sigma/2})}, \quad \frac{1}{2} - \frac{1}{q} > \frac{\sigma}{d}, \quad \sigma \in [0,1],$$

avec des conditions supplémentaires sur p, q et σ . Le cas limite $\sigma/d = 1/2 - 1/q$ de cette dernière inégalité est toujours vraie par l'inclusion de Sobolev :

$$L^q(\mathbb{R}^d) \subset H^\sigma(\mathbb{R}^d) \subset D(P^{\sigma/2}),$$

et la conservation de la norme $D(P^{\sigma/2})$ de toute solution de (2).

Remarquons que d'après cette inclusion, (14) est encore vrai dans les espaces de Sobolev usuels, c'est à dire en remplaçant $D(P^{\sigma/2})$ par $H^\sigma(\mathbb{R}^n)$.

- Le potentiel V et les quasi-modes u_n étant à supports compacts, aussi proches de 0 que l'on veut, le contre-exemple précédent est également valable dans n'importe quel ouvert borné, pour un Laplacien de Neumann ou de Dirichlet.
- Des exemples d'équations de Schrödinger ne vérifiant pas de dispersion ou d'inégalités de Strichartz sont également construits dans [1] et [4]. Dans les deux cas, le problème vient de la métrique définissant le Laplacien. Mentionnons aussi que l'idée d'utiliser des quasi-modes en relation avec des inégalités de Strichartz est due à M. Zworski (voir [8]).

Précisons encore que pour le potentiel V du théorème, on peut définir P sans ambiguïté. L'opérateur $-\Delta + V$ a un sens sur $C_0^\infty(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$, et est essentiellement auto-adjoint sur cet espace (cf par exemple le théorème de Kalf, Walter, Schmincke et Simon cité dans [7] page 186). On appelle P son unique extension auto-adjointe, qui est bien sûr positive.

L'auteur tient à remercier Nicolas Burq, son directeur de recherche, et Clotilde Fermanian Kammerer pour leur aide précieuse.

Le reste du texte est consacré aux démonstrations des résultats présentés dans cette introduction.

2. DÉMONSTRATION DU COROLLAIRE.

D'après l'inégalité de Hölder, si v est une fonction sur \mathbb{R}^d avec un support à volume fini B ,

$$(15) \quad \|v\|_{L^{q_0}} \leq B^{1/q_0 - 1/q} \|v\|_{L^q}, \quad q > q_0.$$

Posons $U_n(t) = e^{-i\lambda_n^2 t} u_n$. Alors :

$$(16) \quad \begin{aligned} i\partial_t U_n - P U_n &= -e^{-i\lambda_n^2 t} f_n, \quad U_n|_{t=0} = u_n \\ U_n(t) &= e^{-itP} u_n + ie^{-i\lambda_n^2 t} \int_0^t e^{i(s-t)P} f_n ds. \end{aligned}$$

Supposons que (11) est fausse. D'après (16) :

$$\int_0^T \|\chi U_n(t)\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} dt \leq \int_0^T \|\chi e^{-itP} u_n\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} dt + \int_0^T \int_0^t \|\chi e^{i(s-t)P} f_n\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} ds dt.$$

Puisque le support de u_n se concentre en 0, et que $\chi(0) \neq 0$, le terme de gauche de cette inégalité est minoré pour n assez grand par :

$$\int_0^T \|u_n\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} dt \geq \frac{1}{C} \left(\frac{\log \lambda_n}{\lambda_n} \right)^{d(1/q - 1/q_0)} \|u_n\|_{L^{q_0}(\mathbb{R}^d)}.$$

Quant au terme de droite, il est dominé d'après la négation de (11) par :

$$\|u_n\|_{L^{q_0}(\mathbb{R}^d)} + \|f_n\|_{L^{q_0}(\mathbb{R}^d)}.$$

On en déduit, en utilisant (10) :

$$\left(\frac{\lambda_n}{\log \lambda_n}\right)^{d(1/q_0-1/q)} \|u_n\|_{L^{q_0}} = O(\|u_n\|_{L^{q_0}} + \lambda_n^{-N}),$$

ce qui donne la contradiction annoncée dès que $N \geq 1$ et $q_0 < q$, car d'après (9), la norme de u_n dans L^{q_0} est minorée par 1.

Par les inégalités de Sobolev, (11) implique (12) en prenant, dans (11), $q_0 = 2$ et $q > 2$ assez proche de 2. Donc (12) est vraie aussi.

Supposons maintenant la négation de (13). Alors, par (16) :

$$\begin{aligned} \|\chi u_n(T)\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} &\leq C\|u_n\|_{L^{q'}(\mathbb{R}^d)} + \int_0^T \|\chi e^{i(s-T)} f_n\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} ds \\ &\leq C\|u_n\|_{L^{q'}(\mathbb{R}^d)} + C\|f_n\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}, \end{aligned}$$

où on a simplement majoré, pour obtenir la deuxième inégalité, la norme $L^{q'}$ sur le support de χ par la norme L^2 , à une constante multiplicative près. On obtient à nouveau une contradiction par (15) et en utilisant $q' < q$.

Il reste à démontrer (14). Dans le cas contraire, on aurait, par (16) :

$$(17) \quad \int_0^T \|u_n(t)\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} dt \leq C\|u_n\|_{D(P^{\sigma/2})} + \int_0^T \int_0^t \|e^{i(s-t)P} f_n\|_{D(P^{\sigma/2})} ds dt.$$

Bien sûr, $e^{i(s-t)P}$ envoie isométriquement le domaine de $P^{\sigma/2}$ sur lui-même. On a :

$$\|f_n\|_{D(P^{1/2})}^2 = \int |\nabla f_n(x)|^2 dx + \int (1 + V(x)) |f_n(x)|^2 dx.$$

Sur le support de u_n , donc sur celui de f_n , $|x| \geq \frac{\log \lambda_n}{C\lambda_n}$. En utilisant la majoration de V donnée par (7), on obtient que sur le support de f_n :

$$|V(r)| \leq C \frac{\lambda_n^2}{(\log \lambda_n)^2} (\log \log \lambda_n - \log \lambda_n)^2 \leq C\lambda_n^2.$$

On en déduit, en utilisant (10) avec $N \geq 2$:

$$(18) \quad \|f_n\|_{D(P^{1/2})} \leq C(\|\nabla f_n\|_{L^2} + \lambda_n \|f_n\|_{L^2}) \leq C\lambda_n^{-1}.$$

De plus, l'équation $Pu_n - \lambda_n^2 u_n = f_n$ implique, en utilisant à nouveau les propriétés (9) et (10) des normes de u_n et f_n :

$$\begin{aligned} \|u_n\|_{D(P^{1/2})}^2 &\leq \|f_n\|_{L^2} \|u_n\|_{L^2} + \lambda_n^2 \|u_n\|_{L^2}^2 \\ &\leq C\lambda_n^2 \|u_n\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

Par interpolation sur les normes, on obtient, puisque σ est compris entre 0 et 1 :

$$(19) \quad \|u_n\|_{D(P^{\sigma/2})} \leq C\lambda_n^\sigma \|u_n\|_{L^2}.$$

D'après (18), (19) et l'inégalité (17) :

$$\|u_n\|_{L^q} \leq C\lambda_n^\sigma \|u_n\|_{L^2} + o(1).$$

Donc avec (15) :

$$\left(\frac{\lambda_n}{\log \lambda_n}\right)^{d/2-d/q} \|u_n\|_{L^2} \leq C\lambda_n^\sigma \|u_n\|_{L^2} + o(1),$$

inégalité absurde car $\frac{d}{2} - \frac{d}{q} > \sigma$.

3. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME.

Notons $r = |x|$ et $'$ la dérivée $\frac{d}{dr}$. On cherche V , λ_n , u_n et f_n , radiales tels que :

$$(20) \quad f_n(r) = -u_n''(r) - \frac{d-1}{r}u_n'(r) + V(r)u_n(r) - \lambda_n^2 u_n(r),$$

avec f_n petit à l'infini. On commence par changer de fonctions pour éliminer la dérivée première dans cette expression. En posant :

$$(21) \quad u_n = r^{-\frac{d-1}{2}}v_n, \quad f_n = r^{-\frac{d-1}{2}}g_n, \quad W = V + \frac{d^2 - 4d + 3}{4r^2}.$$

L'équation (20) devient :

$$(20') \quad g_n(r) = -v_n'' + Wv_n - \lambda_n^2 v_n.$$

Soient :

$$y(s) = e^{-\sqrt{s^2+1}}, \quad b(s) = -\frac{1}{(s^2+1)^{3/2}} + \frac{s^2}{s^2+1},$$

solutions C^∞ sur \mathbb{R} de :

$$(22) \quad -y''(s) + b(s)y(s) = 0$$

$$(23) \quad y(s) > 0, \forall j \in \mathbb{N}, \quad |y^{(j)}(s)| \leq C_j e^{-|s|}$$

$$(24) \quad |b(s)| \leq 1.$$

On notera, pour 2 paramètres réels ω et a :

$$y_{\omega,a}(r) = y(\omega(r-a)), \quad b_{\omega,a}(r) = \omega^2 b(\omega(r-a)),$$

solutions de :

$$(22') \quad -y_{\omega,a}'' + b_{\omega,a}y_{\omega,a} = 0;$$

Soit $q(\lambda) > 0$ définie au voisinage de $+\infty$, strictement croissante et vérifiant :

$$(25) \quad \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} q(\lambda) = +\infty$$

$$(26) \quad \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{q(\lambda)}{\lambda} = 0.$$

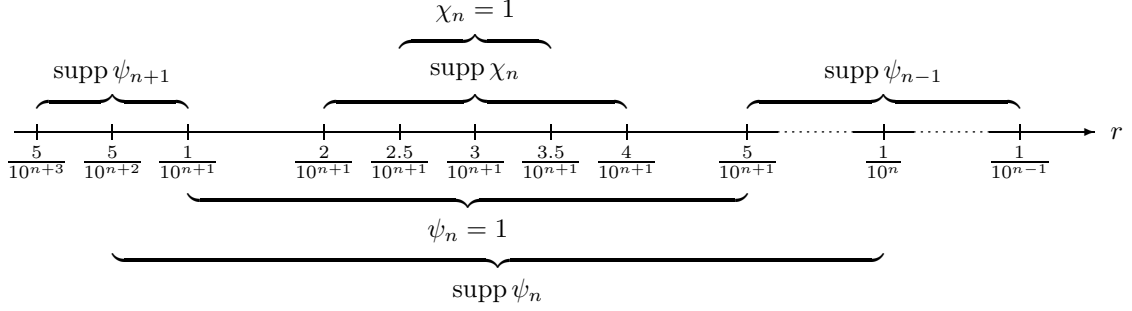
On définit la suite $(\lambda_n)_{n \geq n_0}$, qui tend vers $+\infty$ plus vite que 10^n par :

$$10^n = q(\lambda_n).$$

Soit une troncature : $\chi \in C_0^\infty(]-1, 1[)$, $\chi = 1$ sur $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

On notera :

$$\begin{aligned} \psi_n(r) &= \chi(10^n r) - \chi(10^{n+1} r), \\ \chi_n(r) &= \chi\left(10^{n+1}\left(r - \frac{3}{10^{n+1}}\right)\right), \end{aligned}$$

FIG. 1. Troncatures autour de $r = 3/10^n + 1$

Les ψ_n forment une partition de l'unité au voisinage de 0, et chacun des χ_n localise sur le support de ψ_n , en dehors du support des autres ψ_j , $j \neq n$:

$$\begin{aligned} \text{supp } \psi_n &\subset \left[\frac{5}{10^{n+2}}, \frac{1}{10^n} \right] \\ \frac{1}{10^{n+1}} \leq r \leq \frac{5}{10^{n+1}} &\Rightarrow \psi_n(r) = 1 \\ (27) \quad \sum_{n \geq n_0} \psi_n(r) &= \chi(10^{n_0} r) \end{aligned}$$

$$(28) \quad \text{supp } \chi_n \subset \left[\frac{2}{10^{n+1}}, \frac{4}{10^{n+1}} \right] \subset \{\psi_n = 1\}$$

$$(29) \quad \frac{25}{10^{n+2}} \leq r \leq \frac{35}{10^{n+2}} \Rightarrow \chi_n(r) = 1.$$

On notera y_n et b_n les fonctions :

$$(30) \quad y_n(r) = y_{\frac{\lambda_n}{2}, \frac{3}{10^{n+1}}}(r) = y\left(\frac{\lambda_n}{2}\left(r - \frac{3}{10^{n+1}}\right)\right)$$

$$(31) \quad b_n(r) = b_{\frac{\lambda_n}{2}, \frac{3}{10^{n+1}}}(r) = \frac{\lambda_n^2}{4} b\left(\frac{\lambda_n}{2}\left(r - \frac{3}{10^{n+1}}\right)\right).$$

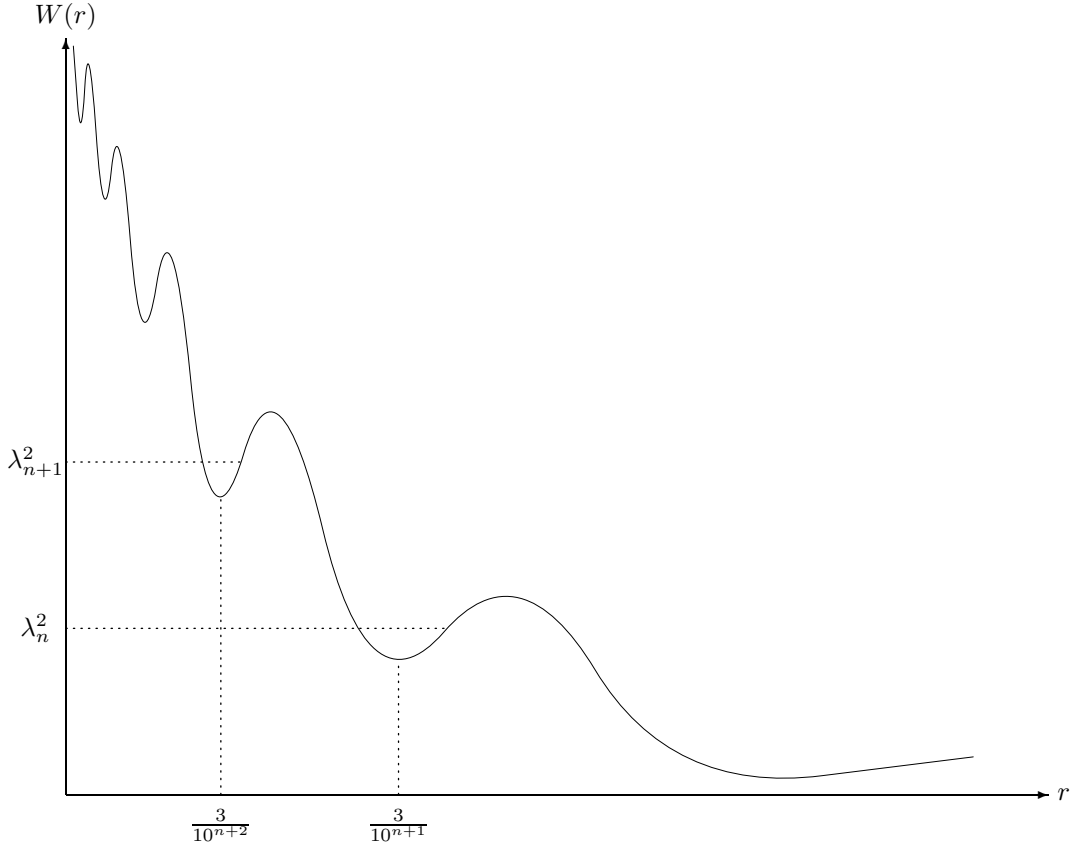
On peut voir chacun des $-b_n$ comme un puits de potentiel qui, par l'équation (22'), concentre l'énergie de y_n autour du point $3/10^{n+1}$. On va construire W pour que l'équation $g_n(r) = 0$ s'écrive, sur un petit intervalle autour de $3/10^{n+1}$ (qui inclura le support de v_n) $-v_n'' + b_n v_n = 0$. La taille de cette intervalle sera de l'ordre de 10^{-n} , tendant moins vite vers 0 que le paramètre $\omega = \lambda_n/2$ de l'équation. En définissant v_n comme une troncature de y_n , la décroissance exponentielle de y à l'infini induira grâce à la différence d'ordre de ces deux échelles, des termes d'erreur assez petits pour impliquer (9) et (10).

Posons (cf figure) :

$$(32) \quad W(r) = \sum_{n \geq n_0} \psi_n(r) (b_n(r) + \lambda_n^2)$$

$$(33) \quad v_n(r) = \alpha_n y_n(r) \chi_n(r),$$

où les α_n sont des constantes strictement positives à choisir. Les fonctions g_n , u_n et f_n , ainsi que le potentiel V sont alors définies par (20') et (21).


 FIG. 2. Le potentiel W

Lemme 1. *On a les inégalités suivantes :*

$$(34) \quad \forall j \in \mathbb{N}, \exists C > 0, \left\| \frac{d^j f_n}{dr^j} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq C \alpha_n \lambda_n^{1+j} (q(\lambda_n))^{\frac{d+1}{2}} e^{-\frac{\lambda_n}{20q(\lambda_n)}}$$

$$(35) \quad \|u_n\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \geq \frac{\alpha_n}{C} \lambda_n^{-1} (q(\lambda_n))^{-\frac{d-1}{2}}.$$

Démonstration. D'après (28), sur le support de χ_n , W vaut exactement $b_n + \lambda_n^2$. On en déduit :

$$(36) \quad g_n(r) = -v_n''(r) + b_n(r)v_n(r).$$

Soit, en utilisant l'équation (22') :

$$f_n(r) = r^{-\frac{d-1}{2}} g_n(r) = r^{-\frac{d-1}{2}} \alpha_n (y_n(r)\chi_n''(r) + 2y_n'(r)\chi_n'(r)).$$

La dérivée j -ème de f_n est donc de la forme :

$$(37) \quad \frac{d^j f_n}{dr^j} = \sum_{j_1+j_2+j_3=j+1} \beta_{j_1, j_2, j_3} \frac{d^{j_1}}{dr^{j_1}} y_n \frac{d^{j_2}}{dr^{j_2}} \chi_n' \frac{d^{j_3}}{dr^{j_3}} r^{-\frac{d-1}{2}}.$$

Sur le support de χ_n' , on a :

$$\left| r - \frac{3}{10^{n+1}} \right| > \frac{1}{10^{n+1}} = \frac{1}{10q(\lambda_n)}.$$

Donc d'après les majorations (23) :

$$\begin{aligned} |y_n^{(j_1)}(r)| &\leq C \lambda_n^{(j_1)} e^{-\frac{\lambda_n}{2}} \left| r - \frac{3}{10^{n+1}} \right| \\ &\leq \lambda_n^{j_1} e^{-\frac{\lambda_n}{20q(\lambda_n)}} \end{aligned}$$

De plus :

$$\begin{aligned} |\chi_n^{(j_2+1)}| &\leq C (q(\lambda_n))^{j_2+1} \leq C \lambda_n^{j_2} q(\lambda_n) \\ \left| \left(\frac{d}{dr} \right)^{j_3} \left(r^{-\frac{d-1}{2}} \right) \right| &\leq C (q(\lambda_n))^{\frac{d-1}{2}+j_3} \leq C \lambda_n^{j_3} (q(\lambda_n))^{\frac{d-1}{2}}, \end{aligned}$$

car sur le support de χ_n , $r \geq \frac{1}{10^{n+1}}$. En majorant la somme (37) par ces trois dernières inégalités, on obtient exactement (34). (37), on obtient exactement (34).

Démontrons (35). Par définition de y_n :

$$\frac{\lambda_n}{2} \left| r - \frac{3}{10^n} \right| \leq \frac{1}{2} \Rightarrow y_n(r) \geq m = \sup_{|s| \leq \frac{1}{2}} |y(s)|.$$

De plus, si cette dernière condition sur r est vérifiée, et si n est assez grand on a $\chi_n(r) = 1$ et donc :

$$u_n(r) = r^{-\frac{d-1}{2}} v_n(r) = r^{-\frac{d-1}{2}} \alpha_n y_n(r)$$

D'où :

$$\begin{aligned} \|u_n\|_{L^1} &\geq m \alpha_n \int_{\lambda_n \left| r - \frac{3}{10^n} \right| \leq 1} r^{-\frac{d-1}{2}} r^{d-1} dr \\ &\geq \frac{\alpha_n}{C} (10^{-n})^{\frac{d-1}{2}} \lambda_n^{-1}. \end{aligned}$$

□

Choisissons un $M > 1$ et posons :

$$(38) \quad q(\lambda) = \frac{\lambda}{M \log \lambda}.$$

La fonction q , positive et strictement croissante au voisinage de $+\infty$, vérifie bien les hypothèses (25) et (26). De plus, d'après le lemme 1, et en majorant grossièrement $q(\lambda_n)$ par λ_n :

$$\begin{aligned} \left\| \frac{d^j f_n}{dr^j} \right\|_{L^\infty} &\leq C \alpha_n \lambda_n^{\frac{d+3}{2}+j-\frac{M}{20}} \\ \|u_n\|_{L^1} &\geq \frac{\alpha_n}{C} \lambda_n^{\frac{d+1}{2}}, \end{aligned}$$

avec des nouvelles constantes C qui dépendent éventuellement de M . Les conditions (9) et (10) du théorème sont donc respectées avec un bon choix des constantes M et α_n . Le support de u_n est confondu avec celui de χ_n , qui est effectivement de la forme :

$$\left\{ c_1 \frac{\log \lambda_n}{\lambda_n} \leq r \leq c_2 \frac{\log \lambda_n}{\lambda_n} \right\},$$

si χ est bien choisie. Il reste à vérifier l'assertion (7) sur le potentiel. On commence par évaluer la fonction réciproque de q .

Lemme 2. *Soit q est définie par (38). Alors :*

$$q(\lambda) \log(q(\lambda)) \sim \frac{\lambda}{M}, \quad \lambda \rightarrow +\infty.$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} q(\lambda) \log q(\lambda) &= q(\lambda) \log \left(\frac{\lambda}{M \log \lambda} \right) \\ &= q(\lambda) (\log \lambda - \log \log \lambda - \log M) \\ &\sim q(\lambda) \log \lambda, \end{aligned}$$

quand λ tend vers $+\infty$. □

Sur le support de ψ_n , puisque $q(\lambda_n) = 10^n$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{20r} &\leq q(\lambda_n) \leq \frac{1}{r} \\ \frac{1}{20r} |\log r - \log 20| &\leq q(\lambda_n) \log(q(\lambda_n)) \leq \frac{1}{r} |\log r|, \end{aligned}$$

(l'application $s \mapsto s \log s$ étant croissante pour $s > e^{-1}$). Soit, en utilisant le lemme 2 et en se plaçant assez près de 0 :

$$C^{-1} \frac{1}{r} |\log r| \leq \lambda_n \leq C \frac{1}{r} |\log r|.$$

Donc, par la définition (32) de $W(r)$, et comme $|b_n|$ est majoré par $\lambda_n^2/4$:

$$C^{-1} \frac{|\log r|^2}{r^2} \sum_{n \geq n_0} \psi_n(r) \leq W(r) \leq C \frac{|\log r|^2}{r^2} \sum_{n \geq n_0} \psi_n(r),$$

ce qui donne l'inégalité (7) sur le potentiel W compte tenu de (27). On en déduit évidemment (7) sur V .

Remarque. Pour avoir des quasi-modes d'ordre infini il suffisait de prendre $q(\lambda) = \frac{\lambda}{(\log \lambda)^{1+\varepsilon}}$, et de modifier le lemme 2 en conséquence.

RÉFÉRENCES

- [1] V. Banica. Dispersion and Strichartz inequalities for Schrödinger equations with singular coefficients. A paraître au *SIAM Journal of Mathematical Analysis*.
- [2] N. Burq, P. Gérard, N. Tzvetkov. On nonlinear Schrödinger equations in exterior domains. Preprint.
- [3] N. Burq, F. Planchon, J.G. Stalker, A. Shadi Tahvildar-Zadel. Strichartz estimates for the wave and Schrödinger equations with the inverse-square potential. Preprint.
- [4] C. Castro, E. Zuazua. Concentration and lack of observability of waves in highly heterogeneous media. *Arch. Ration. Mech. Anal.* 164 (2002), No 1, 39-72.
- [5] T. Duyckaerts. Inégalités de résolvante pour des potentiels multipolaires. Travail en cours.
- [6] A. Ruiz, L. Vega. Local regularity of solutions to wave with time-dependent potentials. *Duke Math. J.* 76 (1994) No 3 p. 913-940.
- [7] M. Reed, B. Simon. Methods of modern mathematical physics. 2, Fourier analysis, self-adjointness. San Diego CA London Sydney : *Academic Press*, 1975.
- [8] H. F. Smith, C.D. Sogge, Global Strichartz estimates for nontrapping perturbations of the Laplacian. *Comm. Partial Differential Equations* 25 (2000), No 11-12, 2171–2183. *Arch. Ration. Mech. Anal.* 164 (2002), No 1, 39-72.

UNIVERSITÉ DE PARIS-SUD, BÂTIMENT 430, 91405 ORSAY CEDEX
 E-mail address: Thomas.Duyckaerts@math.u-psud.fr